

ELEMENTOS FINITOS AVANZADOS EN SÓLIDOS

TRABAJO PRÁCTICO 1

Resolución de Sistemas No Lineales



Estudiante

FREDY ANDRÉS MERCADO NAVARRO

DNI: 94.872.342

Maestría en Simulación Numérica y Control

Docentes: Eduardo Dvorkin y José Gabriel Hasbani.

Cuatrimestre: I-2013

Entrega: 05 de Septiembre

**Universidad de Buenos Aires
Ciudad Autónoma de Buenos Aires
Argentina
2013**

INDICE DE CONTENIDOS

1. INTRODUCCIÓN	3
2. TEORÍA SOBRE MÉTODOS ITERATIVOS	4
2.1 ESQUEMA DE ITERACIÓN DE NEWTON-RAPHSON (FULL)	4
2.2 ESQUEMA DE ITERACIÓN DE NEWTON-RHAPSON MODIFICADO	4
2.3 ESQUEMA DE ITERACIÓN BFGS CON OPCIÓN DE BÚSQUEDA LINEAL.....	5
3. CRITERIOS DE CONVERGENCIA	8
3.1 CRITERIO PARA INCREMENTO DE DESPLAZAMIENTOS.....	8
3.2 CRITERIO PARA INCREMENTO DE FUERZAS DESBALANCEADAS	8
3.3 CRITERIO PARA INCREMENTO DE ENERGÍA INTERNA	8
4. MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE	9
4.1 MATRIZ TANGENTE PARA CASO 1 Y CASO 2.....	9
4.2 MATRIZ TANGENTE PARA CASO 3.....	9
5. ORDEN DE CONVERGENCIA	10
6. PRUEBAS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS.....	11
5.1 FULL NEWTON-RAPHSON	11
5.1 NEWTON-RAPHSON MODIFICADO	12
5.2 BFGS	13
7. CONCLUSIONES Y OBSERVACIONES	15
8. BIBLIOGRAFÍA.....	16

INDICE DE FIGURAS

FIGURA 1. CONVERGENCIA DE DESPLAZAMIENTOS PARA CASO 1.	13
FIGURA 2. CONVERGENCIA DE DESPLAZAMIENTOS PARA CASO 2.	14
FIGURA 3. CONVERGENCIA DE DESPLAZAMIENTOS PARA CASO 3.....	14

INDICE DE TABLAS

TABLA 1. ITERACIONES EMPLEADAS. CASO DE ESTUDIO VS. MÉTODO ITERATIVO.	11
TABLA 2. CANTIDAD DE CÁLCULOS DE MATRIZ TANGENTE. CASO DE ESTUDIO VS. MÉTODO ITERATIVO.....	11
TABLA 3. ORDENES DE CONVERGENCIA PARA CASO 1 – FULL NEWTON-RAPHSON.	12
TABLA 4. ORDENES DE CONVERGENCIA PARA CASO 2 – FULL NEWTON-RAPHSON.	12

1. INTRODUCCIÓN

Este trabajo busca desarrollar una rutina para resolver problemas no lineales empleando los métodos de Newton-Raphson, Newton-Raphson modificado y BFGS con opción de búsqueda lineal. Se busca analizar las ventajas y desventajas de cada método comparando las historias de cálculo (número de iteraciones, número de veces que se construyó la matriz K, número de veces que se invirtió la matriz K, etc).

La rutina de cálculo fue codificada haciendo uso de Matlab®. Los tres casos que forman el TP1 pueden ser evaluados modificando algunos campos disponibles al inicio del código.

2. TEORÍA SOBRE MÉTODOS ITERATIVOS

A continuación se exponen los tres métodos empleados en este trabajo práctico y que son utilizados para la solución de sistemas de ecuaciones no lineales.

2.1 Esquema de iteración de Newton-Raphson (Full)

Por simplicidad, asumiremos que:

$$U = {}^{t+\Delta t} U$$

$$R = {}^{t+\Delta t} R$$

$$K = {}^{t+\Delta t} K$$

$$F = {}^{t+\Delta t} F$$

Ecuación 1

Si asumimos que las cargas externas aplicadas son independientes de la deformación, podemos calcular un incremento en los desplazamientos a partir de la siguiente ecuación:

$$K^{(i-1)} \Delta U^{(i)} = R - F^{(i-1)}$$

Ecuación 2

${}^{t+\Delta t} K^{(i-1)}$: matriz de rigidez tangente actual.

Donde:

$$K^{(i-1)} = \left[\frac{\partial F}{\partial U} \right]_{U^{(i-1)}}$$

Ecuación 3

Luego:

$$U^{(i)} = U^{(i-1)} + \Delta U^{(i)}$$

Ecuación 4

Las condiciones iniciales para las iteraciones son:

$$K^{(0)} = {}^t K, \quad F^{(0)} = {}^t F, \quad U^{(0)} = {}^t U$$

2.2 Esquema de iteración de Newton-Raphson modificado

Teniendo en consideración el método de Newton-Raphson podemos reconocer que, en general, el mayor costo computacional por cada iteración corresponde al cálculo y factorización de la matriz de rigidez tangente. Desde luego, estos cálculos pueden tener un

costo computacional muy alto cuando se consideran sistemas de orden muy grande, lo cual impulsa el uso de una modificación del algoritmo del método Full Newton-Raphson, al cual llamaremos método de Newton-Raphson Modificado.

El método consiste en ahorrar tiempo de cómputo actualizando la matriz de rigidez tangente en configuraciones de equilibrio elegidas, lo que implica menos reformaciones de la matriz de rigidez en comparación con el Full Newton-Raphson, que actualiza dicha matriz en cada iteración. La selección de los pasos temporales en los cuales se debe actualizar la matriz tangente depende del grado de no-linealidad de la respuesta del sistema. Mientras mayor sea la no-linealidad, con mayor frecuencia se debe actualizar la matriz.

Dicho lo anterior, el algoritmo para implementarse puede ser derivado directamente del Full Newton-Raphson.

2.3 Esquema de iteración BFGS con opción de búsqueda lineal

BFGS es una abreviación de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno. Este método es una alternativa a las diferentes formas que tiene el método de Newton-Raphson, y pertenece a un grupo de métodos iterativos llamados métodos Quasi-Newton. Consisten en actualizar la matriz de rigidez (o mejor, su inversa) para proveer una aproximación secante a dicha matriz desde la iteración $(i-1)$ hasta (i) .

A continuación se plasman las ecuaciones que son resueltas en cada iteración del método. Por simplicidad, asumiremos que:

$$U = {}^{t+\Delta t} U$$

$$R = {}^{t+\Delta t} R$$

$$K = {}^{t+\Delta t} K$$

$$F = {}^{t+\Delta t} F$$

Para la primera iteración del BFGS se deben poseer con anterioridad los siguientes datos:

- $U^{(i-1)}$
- R
- $\Delta R^{(i-1)}$
- $(K^{-1})^{(i-1)}$
- $F^{(i-1)}$

A continuación se sigue la siguiente secuencia de pasos:

- Evaluamos el vector de incrementos de los desplazamientos. Con él definimos una "dirección" para el incremento de desplazamientos actual.

$$\Delta U = (K^{-1})^{(i-1)} \Delta R^{(i-1)}$$

$$\Delta R^{(i-1)} = R - F^{(i-1)}$$

Ecuación 5

- Realizamos la búsqueda lineal en la dirección ΔU para satisfacer el equilibrio en esa dirección y evaluamos el vector de desplazamientos.

$$U^{(i)} = U^{(i-1)} + \beta \Delta U$$

Ecuación 6

β es un escalar. Se calculan las cargas desbalanceadas que corresponden a $U^{(i)}$, es decir $(R - F^{(i)})$. El parámetro β es variado hasta que se cumpla:

$$\Delta U^T (R - F^{(i)}) \leq STOL * \Delta U^T (R - F^{(i-1)})$$

Ecuación 7

El valor de β hallado determina el valor de $U^{(i)}$.

Se calcula la matriz de rigidez $K^{(i)}$ que satisface:

$$K^{(i)} \delta^{(i)} = \gamma^{(i)}$$

Ecuación 8

Para ello se requieren primero $\delta^{(i)}$ y $\gamma^{(i)}$.

$$\delta^{(i)} = U^{(i)} - U^{(i-1)}$$

$$\gamma^{(i)} = \Delta R^{(i-1)} - \Delta R^{(i)}$$

Ecuación 9

Con:

$$\Delta R^{(i)} = R - F^{(i)}$$

Ecuación 10

- Evaluar la corrección de la matriz de rigidez. Para el método BFGS la matriz actualizada puede expresarse como un producto, así:

$$(K^{-1})^{(i)} = A^{(i)T} (K^{-1})^{(i-1)} A^{(i)}$$

Ecuación 11

$A^{(i)}$ es una matriz de $n \times n$ y:

$$A^{(i)} = I + v^{(i)} w^{(i)T}$$

Ecuación 12

$v^{(i)}$ y $w^{(i)}$ son vectores:

$$v^{(i)} = - \sqrt{\frac{\delta^{(i)T} \gamma^{(i)}}{\delta^{(i)T} \beta \Delta R^{(i-1)}}} * \beta \Delta R^{(i-1)} - \gamma^{(i)}$$
$$w^{(i)} = \frac{\delta^{(i)}}{\delta^{(i)T} \gamma^{(i)}}$$

Ecuación 13

Más detalles sobre el método pueden ser consultados en la referencia (1).

3. CRITERIOS DE CONVERGENCIA

Para que una estrategia de solución basada en soluciones incrementales sea efectiva, se deben emplear criterios realistas que terminen con las iteraciones. Los tres criterios de terminación utilizados en este trabajo son:

3.1 Criterio para Incremento de Desplazamientos

Estamos en búsqueda de los desplazamientos en la configuración en el tiempo $t + \Delta t$, luego, es natural requerir que los desplazamientos al final de cada iteración se encuentren comprendidos dentro de cierta tolerancia a partir de la solución de desplazamientos verdadera. Un criterio de convergencia realista es:

$$\|\Delta U^{(i)}\|_2 \leq \epsilon_D * \|\|^{t+\Delta t} U^{(i)}\|_2$$

Ecuación 14

Donde ϵ_D es la tolerancia de convergencia para los desplazamientos.

3.2 Criterio para Incremento de Fuerzas Desbalanceadas

Aquí requerimos que la norma del vector de cargas desbalanceadas esté dentro de una tolerancia ϵ_F del incremento de cargas original:

$$\|\|^{t+\Delta t} R - {}^{t+\Delta t} F\|_2 \leq \epsilon_F * \|\|^{t+\Delta t} R - {}^t F\|_2$$

Ecuación 15

3.3 Criterio para Incremento de Energía Interna

Los cálculos realizados para revisar este criterio corresponden a una comparación entre la cantidad de trabajo realizado por las cargas desbalanceadas sobre los incrementos de desplazamiento y el incremento inicial de energía interna. Se asume que hay convergencia cuando, para una tolerancia de energía ϵ_E :

$$\Delta U^{(i)T} ({}^{t+\Delta t} R - {}^{t+\Delta t} F^{(i-1)}) \leq \epsilon_E * (\Delta U^{(1)T} ({}^{t+\Delta t} R - {}^t F))$$

Ecuación 16

Este criterio de convergencia es una medida atractiva, ya que contiene tanto a los desplazamientos como a las fuerzas.

4. MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE

Teniendo en cuenta las expresiones de la Ecuación 1, para hallar los desplazamientos totales que equilibran las cargas no balanceadas necesitamos resolver la Ecuación 2:

$$K^{(i-1)}\Delta U^{(i)} = R - F^{(i-1)}$$

El problema nos da las expresiones que forman el vector de fuerzas internas equivalentes a tensiones, por lo tanto debemos aplicar la Ecuación 3 para hallar una expresión para la matriz tangente que permita evaluarla iteración tras iteración. La expresión en términos generales corresponde a:

$$K^{(i-1)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial U_1} & \frac{\partial F_1}{\partial U_2} & \frac{\partial F_1}{\partial U_3} \\ \frac{\partial F_2}{\partial U_1} & \frac{\partial F_2}{\partial U_2} & \frac{\partial F_2}{\partial U_3} \\ \frac{\partial F_3}{\partial U_1} & \frac{\partial F_3}{\partial U_2} & \frac{\partial F_3}{\partial U_3} \end{bmatrix}_{U^{(i-1)}}$$

4.1 Matriz tangente para Caso 1 y Caso 2

Luego de derivar las fuerzas internas con respecto a los desplazamientos, obtenemos:

$$K^{(i-1)} = \begin{bmatrix} 3 & u_3 \sin(u_2 u_3) & u_2 \sin(u_2 u_3) \\ 2u_1 & -162(u_2 + 0.1) & \cos(u_3) \\ -u_2 \exp(-u_1 u_2) & -u_1 \exp(-u_1 u_2) & 20 \end{bmatrix}_{U^{(i-1)}}$$

4.2 Matriz tangente para Caso 3

Este sistema posee dos dimensiones, luego:

$$K^{(i-1)} = \begin{bmatrix} (u_2)^2 + 6 & 2u_1 u_2 \\ 2u_1 u_2 & (u_1)^2 + 2 \end{bmatrix}_{U^{(i-1)}}$$

5. ORDEN DE CONVERGENCIA

Para un problema donde u_i converge a u , la diferencia entre ambos es:

$$e_i = u_i - u$$

Si existe un número positivo $p \geq 1$ y una constante $c \neq 0$ tal que:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|u_i - r|}{|u_{(i-1)} - r|^p} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|e_i|}{|e_{(i-1)}|^p} = c$$

Donde p es el orden de convergencia, mientras que c es llamada constante de error asintótica.

Para estimar el orden de convergencia asumimos que c permanece constante entre la iteración $(i - 1)$ y la iteración $(i + 1)$, luego:

$$\frac{|u_i - r|}{|u_{(i-1)} - r|^p} = \frac{|u_{(i+1)} - r|}{|u_{(i)} - r|^p}$$

Resolviendo para p obtenemos:

$$p = \frac{\log \left| \frac{e_{(i+1)}}{e_{(i)}} \right|}{\log \left| \frac{e_{(i)}}{e_{(i-1)}} \right|}$$

Para emplear esta fórmula se requiere la solución verdadera r , la cual no se posee, por lo cual se aproximarán los errores como diferencias entre el incremento en un paso menos el incremento en el paso iterativo anterior. Siendo así, p finalmente se puede aproximar como:

$$p = \frac{\log \left| \frac{u_{(i+1)} - u_{(i)}}{u_{(i)} - u_{(i-1)}} \right|}{\log \left| \frac{u_{(i)} - u_{(i-1)}}{u_{(i-1)} - u_{(i-2)}} \right|}$$

Esta fórmula solo da un estimado del orden de convergencia, pero es una buena medida de la eficiencia de varias formas de algoritmos iterativos de punto fijo (2).

6. PRUEBAS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

La Tabla 1 y Tabla 2 muestran un resumen de la cantidad de iteraciones empleadas y el número de cálculos de la matriz tangente para alcanzar convergencia de las iteraciones con una tolerancia de $1e-9$ para los tres criterios empleados. Cada caso de estudio fue solucionado mediante los tres métodos iterativos estudiados en este trabajo. Para el método de Newton-Raphson Modificado se realizaron tres corridas, con actualizaciones de la matriz de rigidez tangente cada 2, 5 y 10 iteraciones. El caso de actualización en cada iteración corresponde con el método de Full Newton-Raphson, por lo cual no fue realizado.

Tabla 1. Iteraciones empleadas. Caso de estudio vs. Método iterativo.

NUMERO DE ITERACIONES					
	Full Newton-Raphson	Newton-Raphson Modificado			BFGS
		2 ITE	5 ITE	10 ITE	
Caso 1	6	7	9	12	7
Caso 2	6	7	10	12	10
Caso 3	5	6	9	12	8

Tabla 2. Cantidad de cálculos de matriz tangente. Caso de estudio vs. Método Iterativo.

NUMERO DE CALCULOS DE MATRIZ TANGENTE K					
	Full Newton-Raphson	Newton-Raphson Modificado			BFGS
		2 ITE	5 ITE	10 ITE	
Caso 1	6	4	3	2	7
Caso 2	6	4	3	2	10
Caso 3	5	4	2	2	8

5.1 Full Newton-Raphson

Es el método iterativo más efectivo entre los tres estudiados en este trabajo. Satisface la ecuación de equilibrio incremental con el menor número de iteraciones para cada caso de estudio (ver Tabla 1). En este método la matriz de rigidez tangente se construyó tantas veces como iteraciones se necesitaron para lograr el cumplimiento de todos los criterios de convergencia, lo cual lo hace el método más costoso en términos computacionales (Tabla 2).

La convergencia en menos iteraciones puede ser observada gráficamente en la Figura 1, Figura 2 y Figura 3. Se decidió graficar Número de Iteraciones vs. ΔU para observar el comportamiento de los incrementos de desplazamiento y tener una idea más clara de los órdenes de convergencia del método expuestos en la Tabla 3 y la Tabla 4. Sabemos que este

método garantiza un orden de convergencia de 2, lo cual se evidencia en algunos de los cálculos consignados en las tablas.

Todas las tablas de datos con los resultados numéricos de las iteraciones para cada Caso y método de solución están contenidas en el Anexo.

Tabla 3. Ordenes de convergencia para Caso 1 – Full Newton-Raphson.

Orden de Convergencia - CASO 1			
Full Newton-Raphson			
ITERACION	U1	U2	U3
1	N/A	N/A	N/A
2	0.4	1.6	0.7
3	1.8	2.0	1.2
4	2.0	2.0	2.0
5	5.8	2.0	1.3
6	N/A	N/A	N/A

Tabla 4. Ordenes de convergencia para Caso 2 – Full Newton-Raphson.

Orden de Convergencia - CASO 2			
Full Newton-Raphson			
ITERACION	U1	U2	U3
1	N/A	N/A	N/A
2	1.2	2.1	0.2
3	0.9	2.0	2.7
4	2.0	2.0	2.0
5	5.9	2.0	1.8
6	N/A	N/A	N/A

5.1 Newton-Raphson Modificado

El método de solución de Newton-Raphson Modificado se deriva directamente del método Full Newton-Raphson. Se diferencian en la actualización de la matriz de rigidez tangente, la cual no se actualiza en cada iteración, sino a criterio del usuario, en cualquier iteración en la cual se cumpla el equilibrio incremental. Elegimos actualizar la matriz cada 2, 5 y 10 iteraciones.

Este método emplea más iteraciones que Full Newton-Raphson, pero posee la ventaja de ahorrar tiempo de cómputo al no recalcular la matriz tangente sino en aquellas iteraciones en las cuales se desee actualizar. La Tabla 2 ilustra esta idea.

En las Figuras 1, 2 y 3 es notoria la importancia del cálculo y actualización de la matriz tangente. En la iteración 10 se observa cómo la pendiente de las curvas cambia, mejorando el orden de convergencia. Las Figuras también muestran que mientras menor sea el número de

actualizaciones de la matriz tangente, más iteraciones se requieren para cumplir con los mismos criterios de convergencia.

5.2 BFGS

Las soluciones que se hallaron mediante este método convergieron en menos iteraciones que el Newton-Raphson Modificado, pero en más iteraciones que el Full Newton-Raphson. En estas soluciones no se empleó la búsqueda lineal, sino que se dejó fijo el valor del escalar β en un valor igual a 1 (ver Ecuación 6).

Al observar la Figura 1 y Figura 2 es notoria la diferencia que existe entre la solución del Caso 1 y la del Caso 2. Para el caso dos se requirieron más iteraciones que para el Caso 1, cuando la única diferencia existente entre una corrida y la otra es el vector de desplazamientos inicial.

Para cada iteración se construyó la matriz tangente, lo que implica que no existe ninguna ventaja computacional en este sentido, como sí la ofrece el método N-R Modificado.

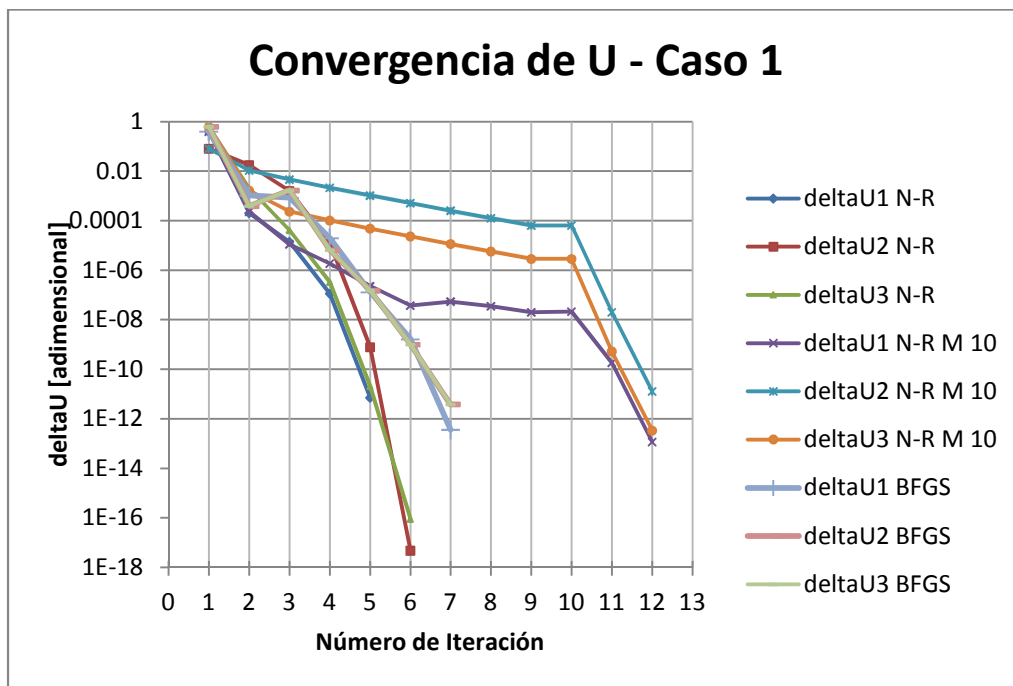


Figura 1. Convergencia de Desplazamientos para Caso 1.

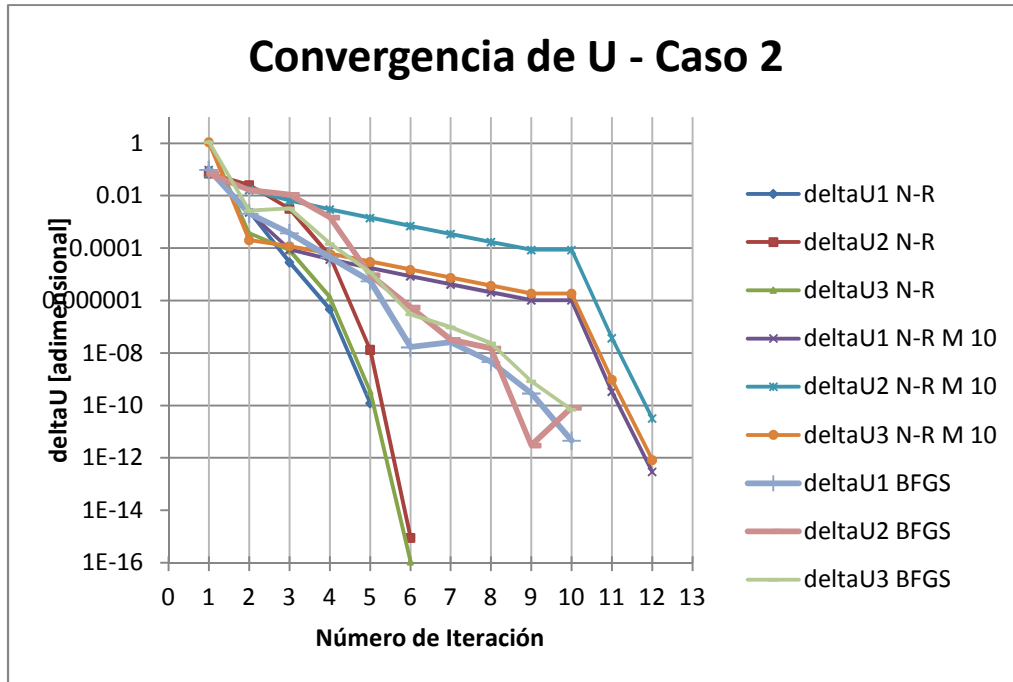


Figura 2. Convergencia de Desplazamientos para Caso 2.

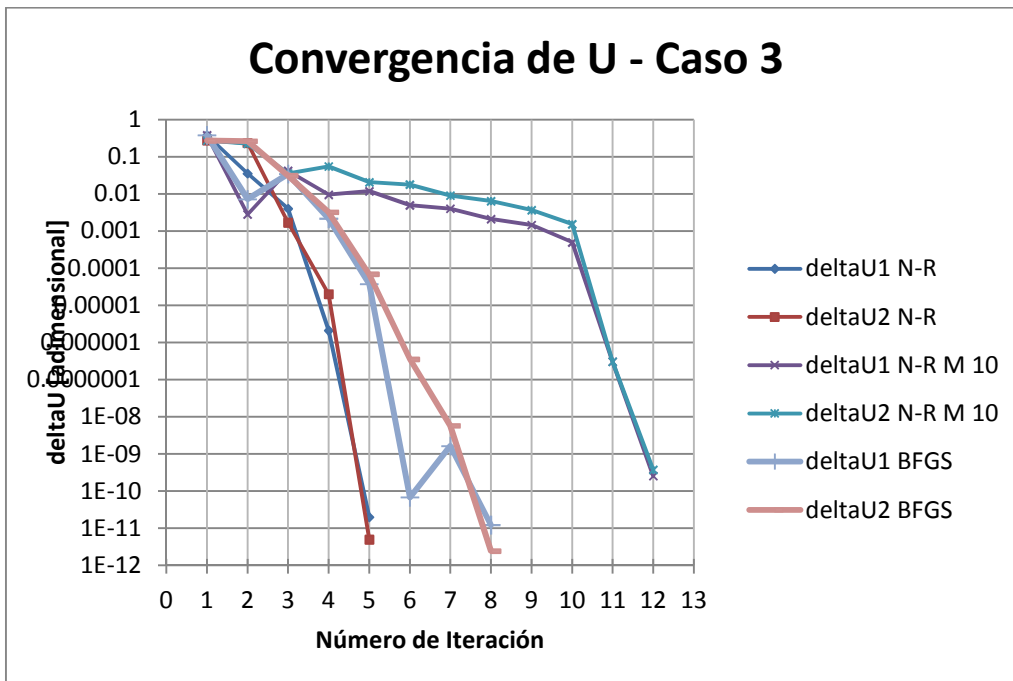


Figura 3. Convergencia de desplazamientos para Caso 3.

7. CONCLUSIONES Y OBSERVACIONES

- Todos los métodos de solución iterativos lograron convergencia al cumplir los criterios para desplazamientos, fuerzas no balanceadas y energías.
- El método de Newton-Raphson logró converger en un menor número de iteraciones que los demás métodos, y se comprobó numéricamente, el orden de convergencia que posee (orden 2).
- El método de Newton-Raphson es también el método más costoso computacionalmente, pero al mismo tiempo es también el más efectivo.
- Una variación al método de Newton-Raphson es el método Newton-Raphson Modificado, donde la matriz tangente se actualiza en cualquier configuración incremental de equilibrio y el número de veces que se desee. Si este método se lleva a su mejor capacidad de predicción se convierte en el método de Newton-Raphson (Full).
- El orden de convergencia de los métodos iterativos estudiados puede estimarse a partir de considerar la diferencia entre iteraciones sucesivas como un error estimado que es proporcional al error verdadero.
- Como una posibilidad de mejor para el presente trabajo está implementar la búsqueda lineal para el algoritmo BFGS. Esta búsqueda lineal forma parte integral del método y es una de las principales componentes que lo hacen un método robusto.

8. BIBLIOGRAFÍA

1. *Finite Element Procedures*. **Bathe, Klaus-Jurgen**. s.l. : Prentice Hall, 1996.
2. **Senning, Jonathan**. *Computing and estimating the rate of convergence*. [prod.] Gordon College Department of Mathematics and Computer Science. Wenham : s.n., 2007.

ANEXOS

RUTINA DE CÁLCULO EN MATLAB

Se adjunta a continuación el programa desarrollado en Matlab junto con dos funciones que se emplean dentro del mismo. Una calcula la matriz de rigidez tangente y otra el vector de fuerzas internas equivalentes a tensiones.

Programa Principal

```
%TP1 - SOLUCIÓN DE SISTEMAS NO LINEALES
%Bathe page 756-761.

clear all
clc

%Ajustes - Inicio

    %1.2.3.TODOS - Inicio
    dim=3;
    iterMethod=3; % 1. Full Newton-Raphson
                  % 2. Newton-Raphson Modificado
                  % 3. BFGS
    escribirXls=0; % 0: si      otro: no.
    maxite=20;
    Dtol=1e-9;
    Ftol=Dtol;
    Etol=Ftol;
%1.2.3.TODOS - Fin

    %2.Newton-Raphson Modificado - Inicio
    update=10;
%2.Newton-Raphson Modificado - Fin

    %3.BFSG - Inicio
    beta=1;
%3.BFSG - Fin

%Ajustes - Fin

%Memoria - inicio
K=zeros(dim,dim,maxite);
deltaU=zeros(dim,maxite);
F=zeros(dim,maxite);
U=zeros(dim,maxite);
Dnorm=zeros(maxite,1);
Fnorm=zeros(maxite,1);
Enorm=zeros(maxite,1);
Datos=zeros(maxite,3*dim+4);

if iterMethod==3
    delta=zeros(dim,maxite);
    deltaR=zeros(dim,maxite);
    gamma=zeros(dim,maxite);
    v=zeros(dim,maxite);
    w=zeros(dim,maxite);
    I=eye(dim,dim);
    A=zeros(dim,dim);
    invK=zeros(dim,dim,maxite);
end

end
```

```

%Memoria - fin

%Condiciones iniciales - inicio
if dim==3
    U(:,1)=[0.6;0.1;0.6];
    R=[0;0;0];
elseif dim==2
    U(:,1)=[0.5;3];
    R=[1;5];
elseif dim==1
    U(:,1)=1;
    R=10;
end
%Condiciones iniciales - fin

[K(:, :, 1)]=calcK(U(:,1),dim);
[F(:,1)]=calcF(U(:,1),dim);

%Cálculos iniciales para BFGS
if iterMethod==3
    deltaR(:,1)=R-F(:,1);
    invK(:, :, 1)=inv(K(:, :, 1));
end

for i=2:maxite
    %Método Full Newton-Raphson
    if iterMethod==1
        deltaU(:,i)=K(:, :, i-1) \ (R-F(:,i-1));
        U(:,i)=U(:,i-1)+deltaU(:,i);
        [K(:, :, i)]=calcK(U(:,i),dim);
        [F(:,i)]=calcF(U(:,i),dim);
    end

    %Método Newton-Raphson Modificado
    if iterMethod==2
        deltaU(:,i)=K(:, :, i-1) \ (R-F(:,i-1));
        U(:,i)=U(:,i-1)+deltaU(:,i);
        if rem(i,update)==0
            [K(:, :, i)]=calcK(U(:,i),dim);
        else
            K(:, :, i)=K(:, :, i-1);
        end
        [F(:,i)]=calcF(U(:,i),dim);
    end

    %Método BFGS
    if iterMethod==3
        deltaU(:,i)=invK(:, :, i-1) * (R-F(:,i-1));
        U(:,i)=U(:,i-1)+beta*deltaU(:,i);
        delta(:,i)=U(:,i)-U(:,i-1);

        KPD=beta * (R-F(:,i-1));
        [F(:,i)]=calcF(U(:,i),dim);
        deltaR(:,i)=R-F(:,i);
        gamma(:,i)=deltaR(:,i-1)-deltaR(:,i);
        v(:,i)=-
sqrt((delta(:,i)'*gamma(:,i))/(delta(:,i)'*KPD)) ...
        *KPD-gamma(:,i);
        w(:,i)=delta(:,i)/(delta(:,i)'*gamma(:,i));
        A(:, :)=I+v(:,i)*w(:,i)';
    end
end

```

```

        invK(:, :, i) = A(:, :) ' * invK(:, :, i-1) * A(:, :);
    end

    Dnorm(i, 1) = norm(deltaU(:, i));
    Fnorm(i, 1) = norm(R-F(:, i));
    Enorm(i, 1) = deltaU(:, i) ' * (R-F(:, i-1));

    %Criterios de Convergencia
    if Dnorm(i, 1) <= Dtol * norm(U(:, i)) && ... %Criterio 1
        Fnorm(i, 1) <= Ftol * norm(R-F(:, 1)) && ... %Criterio 2
        Enorm(i, 1) <= Etol * (deltaU(:, 2) ' * (R-F(:, 1))) %Criterio 3
        break;
    end

end

%Llena la primera columna de la tabla Datos con números en orden
for j=1:i
    Datos(j, 1) = j;
end

%Escribe diferentes datos en una sola tabla
Datos(:, 2:dim+1) = U';
Datos(:, dim+2:2*dim+1) = deltaU';
Datos(:, 2*dim+2:3*dim+1) = F';
Datos(:, 3*dim+2) = Dnorm;
Datos(:, 3*dim+3) = Fnorm;
Datos(:, 3*dim+4) = Enorm;

%Escribe los datos de la tabla anterior en un archivo de Excel
if escribirXls==0
    xlswrite('tpl.xlsx', Datos, 'Landing', 'A1');
end

```

Función que calcula K

```

function [K]=calcK(U, dim)

if dim==3
    K=[3, U(3) * sin(U(2) * U(3)), U(2) * sin(U(2) * U(3)); ...
        2*U(1), -162 * (U(2) + 0.1), cos(U(3)); ...
        -U(2) * exp(-U(1) * U(2)), -U(1) * exp(-U(1) * U(2)), 20];

elseif dim==2
    K=[U(2) ^ 2 + 6, 2 * U(1) * U(2); ...
        2 * U(1) * U(2), U(1) ^ 2 + 2];

elseif dim==1
    K=1/sqrt(U);

end

```

Función que calcula F

```
function [F]=calcF(U,dim)

if dim==3

F=[3*U(1)-cos(U(2)*U(3))-0.5;...
   U(1)^2-81*(U(2)+0.1)^2+sin(U(3))+1.06;...
   exp(-U(1)*U(2))+20*U(3)+((10*pi-3)/3)];

elseif dim==2

F=[U(2)^2*U(1)+6*U(1);...
   U(1)^2*U(2)+2*U(2)];

elseif dim==1

F=4+2*sqrt(U);

end
```

TABLAS DE DATOS DE ITERACIONES

CASO 1 – FULL NEWTON-RAPHSON												
	U			deltaU			F			Tolerancias = 1e-9		
lte	1	2	3	1	2	3	1	2	3	Dnorm	Fnorm	Enorm
-	0.10	0.10	0.10	-	-	-	-1.2	-2.07	12.5	-	-	-
1	0.50	0.02	-0.52	0.400217	-0.08051	-0.621519	0	-0.34	0.03	0.7436	0.346	8.05895
2	0.50	0.00	-0.52	-0.0002	-0.0179	-0.002039	0	-0.03	0	0.01801	0.0259	-0.0061
3	0.50	0.00	-0.52	-1.4E-05	-0.00158	-4.13E-05	0	-0	0	0.00158	0.0002	-4E-05
4	0.50	0.00	-0.52	-1.1E-07	-1.2E-05	-3.27E-07	0	-0	0	1.3E-05	1E-08	-3E-09
5	0.50	0.00	-0.52	-7.1E-12	-7.8E-10	-2.05E-11	0	0	-0	7.8E-10	2E-15	-1E-17
6	0.50	0.00	-0.52	-3E-36	4.75E-18	8.894E-17	0	-0	0	8.9E-17	2E-15	1.6E-31

CASO 1 - NEWTON-RAPHSON MODIFICADO - ACTUALIZA K CADA 2 ITERACIONES												
	U			deltaU			F			Tolerancias = 1e-9		
lte	1	2	3	1	2	3	1	2	3	Dnorm	Fnorm	Enorm
-	0.10	0.10	0.10	-	-	-	-1.2	-2.07	12.5	-	-	-
1	0.50	0.02	-0.52	0.400217	-0.08051	-0.621519	0	-0.34	0.03	0.7436	0.346	8.05895
2	0.50	0.00	-0.52	-0.0002	-0.0179	-0.002039	0	-0.03	0	0.01801	0.0259	-0.0061
3	0.50	0.00	-0.52	-1.2E-05	-0.00134	-3.51E-05	0	-0	0	0.00134	0.004	-3E-05
4	0.50	0.00	-0.52	-2.3E-06	-0.00025	-6.51E-06	0	-0	0	0.00025	5E-06	-1E-06
5	0.50	0.00	-0.52	-2.8E-09	-3.1E-07	-8.11E-09	0	-0	0	3.1E-07	1E-08	-2E-12
6	0.50	0.00	-0.52	-7.1E-12	-7.7E-10	-2.03E-11	0	0	0	7.8E-10	2E-15	-1E-17
7	0.50	0.00	-0.52	3.37E-28	-4.8E-18	-8.89E-17	0	0	-0	8.9E-17	2E-15	1.6E-31

CASO 1 - NEWTON-RAPHSON MODIFICADO - ACTUALIZA K CADA 5 ITERACIONES												
	U			deltaU			F			Tolerancias = 1e-9		
lte	1	2	3	1	2	3	1	2	3	Dnorm	Fnorm	Enorm
-	0.10	0.10	0.10	0	0	0	-1.2	-2.07	12.5	0	0	0
1	0.50	0.02	-0.52	0.400217	-0.08051	-0.621519	0	-0.34	0.03	0.7436	0.346	8.05895
2	0.50	0.01	-0.52	-0.00023	-0.01068	-0.001649	-0	-0.15	0	0.01081	0.1486	-0.0036
3	0.50	0.00	-0.52	1.12E-05	-0.00459	-0.000234	-0	-0.07	0	0.0046	0.0695	-0.0007
4	0.50	0.00	-0.52	1.87E-06	-0.00215	-0.000102	0	-0.03	0	0.00215	0.0337	-0.0001
5	0.50	0.00	-0.52	2.51E-07	-0.00204	-9.4E-05	0	-0	0	0.00205	0.0003	-7E-05
6	0.50	0.00	-0.52	-1.9E-07	-2E-05	-5.38E-07	0	-0	0	2E-05	7E-06	-7E-09
7	0.50	0.00	-0.52	-3.8E-09	-4.1E-07	-1.08E-08	0	-0	0	4.1E-07	1E-07	-3E-12
8	0.50	0.00	-0.52	-7.6E-11	-8.4E-09	-2.19E-10	0	-0	0	8.4E-09	3E-09	-1E-15
9	0.50	0.00	-0.52	-1.5E-12	-1.7E-10	-4.44E-12	0	-0	0	1.7E-10	6E-11	-5E-19

CASO 1 - NEWTON-RAPHSON MODIFICADO - ACTUALIZA K CADA 10 ITERACIONES												
	U			deltaU			F			Tolerancias = 1e-9		
lte	1	2	3	1	2	3	1	2	3	Dnorm	Fnorm	Enorm
-	0.10	0.10	0.10	0	0	0	-1.2	-2.07	12.5	0	0	0
1	0.50	0.02	-0.52	0.400217	-0.08051	-0.621519	0	-0.34	0.03	0.7436	0.346	8.05895
2	0.50	0.01	-0.52	-0.00023	-0.01068	-0.001649	-0	-0.15	0	0.01081	0.1486	-0.0036
3	0.50	0.00	-0.52	1.12E-05	-0.00459	-0.000234	-0	-0.07	0	0.0046	0.0695	-0.0007
4	0.50	0.00	-0.52	1.87E-06	-0.00215	-0.000102	0	-0.03	0	0.00215	0.0337	-0.0001
5	0.50	0.00	-0.52	2.29E-07	-0.00104	-4.82E-05	0	-0.02	0	0.00104	0.0166	-4E-05
6	0.50	0.00	-0.52	-3.8E-08	-0.00051	-2.34E-05	0	-0.01	0	0.00051	0.0083	-9E-06
7	0.50	0.00	-0.52	-5.4E-08	-0.00025	-1.15E-05	0	-0	0	0.00026	0.0041	-2E-06
8	0.50	0.00	-0.52	-3.6E-08	-0.00013	-5.74E-06	0	-0	0	0.00013	0.0021	-5E-07
9	0.50	0.00	-0.52	-2E-08	-6.4E-05	-2.86E-06	0	-0	0	6.4E-05	0.001	-1E-07
10	0.50	0.00	-0.52	-2.1E-08	-6.4E-05	-2.86E-06	0	-0	0	6.4E-05	3E-07	-7E-08
11	0.50	0.00	-0.52	-1.8E-10	-2E-08	-5.3E-10	0	-0	0	2E-08	2E-10	-7E-15
12	0.50	0.00	-0.52	-1.2E-13	-1.3E-11	-3.37E-13	0	-0	0	1.3E-11	1E-13	-3E-21

CASO 1 - BFGS												
	U			deltaU			F			Tolerancias = 1e-9		
lte	1	2	3	1	2	3	1	2	3	Dnorm	Fnorm	Enorm
-	0.10	0.10	0.10	0	0	0	-1.2	-2.07	12.5	0	0	0
1	0.50	0.02	-0.52	0.400217	-0.08051	-0.621519	0	-0.34	0.03	0.7436	0.346	8.05895
2	0.50	0.01	-0.52	-0.00104	-0.01051	-0.000391	-0	-0.15	0.03	0.01057	0.1542	-0.0036
3	0.50	0.00	-0.52	0.000842	-0.00827	-0.001683	0	-0.01	-0	0.00848	0.0116	-0.0012
4	0.50	0.00	-0.52	-2E-05	-0.00069	-6.46E-06	0	-0	-0	0.0007	0.0003	-8E-06
5	0.50	0.00	-0.52	-1.3E-07	-1.9E-05	1.52E-07	0	-0	-0	1.9E-05	3E-07	-6E-09
6	0.50	0.00	-0.52	-1.6E-09	-1.9E-08	9.957E-10	-0	0	-0	1.9E-08	4E-10	-6E-15
7	0.50	0.00	-0.52	3.61E-13	2.66E-11	3.82E-12	0	0	-0	2.7E-11	2E-12	-1E-20

CASO 2 - FULL NEWTON-RAPHSON												
	U			deltaU			F			Tolerancias = 1e-9		
lte	1	2	3	1	2	3	1	2	3	Dnorm	Fnorm	Enorm
-	0.60	0.10	0.60	-	-	-	0.3	-1.26	22.4	-	-	-
1	0.50	0.03	-0.52	-0.0975	-0.07097	-1.123151	0.01	-0.54	-0	1.12961	0.5358	25.1144
2	0.50	0.00	-0.52	-0.00247	-0.02576	-0.000365	0	-0.05	0	0.02588	0.0538	-0.0138
3	0.50	0.00	-0.52	-2.9E-05	-0.00322	-8.14E-05	0	-0	0	0.00322	0.0008	-0.0002
4	0.50	0.00	-0.52	-4.7E-07	-5.2E-05	-1.36E-06	0	-0	0	5.2E-05	2E-07	-4E-08
5	0.50	0.00	-0.52	-1.2E-10	-1.3E-08	-3.53E-10	0	-0	0	1.3E-08	1E-14	-3E-15
6	0.50	0.00	-0.52	7.54E-32	-9.1E-16	-1.12E-16	0	0	-0	9.2E-16	2E-15	-1E-29

CASO 2 - NEWTON-RAPHSON MODIFICADO - ACTUALIZA K CADA 2 ITERACIONES												
	U			deltaU			F			Tolerancias = 1e-9		
Ite	1	2	3	1	2	3	1	2	3	Dnorm	Fnorm	Enorm
-	0.60	0.10	0.60	-	-	-	0.3	-1.26	22.4	-	-	-
1	0.50	0.03	-0.52	-9.75E-02	-7.10E-02	-1.12E+00	0.01	-0.54	-0	1.12961	0.5358	25.1144
2	0.50	0.00	-0.52	-2.47E-03	-2.58E-02	-3.65E-04	0	-0.05	0	0.02588	0.0538	-0.0138
3	0.50	0.00	-0.52	-2.34E-05	-2.58E-03	-6.48E-05	0	-0.01	0	0.00258	0.0113	-0.0001
4	0.50	0.00	-0.52	-6.30E-06	-6.93E-04	-1.78E-05	0	-0	0	0.00069	4E-05	-8E-06
5	0.50	0.00	-0.52	-2.18E-08	-2.39E-06	-6.25E-08	0	-0	0	2.4E-06	3E-07	-9E-11
6	0.50	0.00	-0.52	-1.52E-10	-1.66E-08	-4.35E-10	0	-0	0	1.7E-08	2E-14	-4E-15
7	0.50	0.00	-0.52	-1.48E-16	-1.40E-15	-1.24E-16	-0	0	-0	1.4E-15	2E-15	-3E-29

CASO 2 - NEWTON-RAPHSON MODIFICADO - ACTUALIZA K CADA 5 ITERACIONES												
	U			deltaU			F			Tolerancias = 1e-9		
Ite	1	2	3	1	2	3	1	2	3	Dnorm	Fnorm	Enorm
-	0.60	0.10	0.60	-	-	-	0.3	-1.26	22.4	-	-	-
1	0.50	0.03	-0.52	-0.0975	-0.07097	-1.123151	0.01	-0.54	-0	1.12961	0.5358	25.1144
2	0.50	0.01	-0.52	-0.00233	-0.01663	-0.000204	0	-0.21	-0	0.01679	0.2131	-0.0089
3	0.50	0.01	-0.52	-8.9E-05	-0.00658	-0.000121	0	-0.1	-0	0.00658	0.0969	-0.0014
4	0.50	0.00	-0.52	-3.8E-05	-0.00299	-6.23E-05	0	-0.05	-0	0.00299	0.0464	-0.0003
5	0.50	0.00	-0.52	-3.4E-05	-0.00279	-5.96E-05	0	-0	0	0.00279	0.0006	-0.0001
6	0.50	0.00	-0.52	-3.5E-07	-3.8E-05	-9.91E-07	0	-0	0	3.8E-05	2E-05	-2E-08
7	0.50	0.00	-0.52	-9.5E-09	-1E-06	-2.71E-08	0	-0	0	1E-06	5E-07	-2E-11
8	0.50	0.00	-0.52	-2.6E-10	-2.9E-08	-7.48E-10	0	-0	0	2.9E-08	1E-08	-1E-14
9	0.50	0.00	-0.52	-7.2E-12	-7.9E-10	-2.06E-11	0	-0	0	7.9E-10	4E-10	-1E-17
10	0.50	0.00	-0.52	-2E-13	-2.2E-11	-5.85E-13	-0	0	-0	2.2E-11	2E-15	-8E-21

CASO 2 - NEWTON-RAPHSON MODIFICADO - ACTUALIZA K CADA 10 ITERACIONES												
	U			deltaU			F			Tolerancias = 1e-9		
Ite	1	2	3	1	2	3	1	2	3	Dnorm	Fnorm	Enorm
-	0.60	0.10	0.60	-	-	-	0.3	-1.26	22.4	-	-	-
1	0.50	0.03	-0.52	-0.0975	-0.07097	-1.123151	0.01	-0.54	-0	1.12961	0.5358	25.1144
2	0.50	0.01	-0.52	-0.00233	-0.01663	-0.000204	0	-0.21	-0	0.01679	0.2131	-0.0089
3	0.50	0.01	-0.52	-8.9E-05	-0.00658	-0.000121	0	-0.1	-0	0.00658	0.0969	-0.0014
4	0.50	0.00	-0.52	-3.8E-05	-0.00299	-6.23E-05	0	-0.05	-0	0.00299	0.0464	-0.0003
5	0.50	0.00	-0.52	-1.8E-05	-0.00143	-3.05E-05	0	-0.02	-0	0.00143	0.0227	-7E-05
6	0.50	0.00	-0.52	-8.5E-06	-0.0007	-1.51E-05	0	-0.01	-0	0.0007	0.0113	-2E-05
7	0.50	0.00	-0.52	-4.2E-06	-0.00035	-7.51E-06	0	-0.01	-0	0.00035	0.0056	-4E-06
8	0.50	0.00	-0.52	-2.1E-06	-0.00017	-3.75E-06	0	-0	-0	0.00017	0.0028	-1E-06
9	0.50	0.00	-0.52	-1E-06	-8.6E-05	-1.87E-06	0	-0	-0	8.6E-05	0.0014	-2E-07
10	0.50	0.00	-0.52	-1E-06	-8.6E-05	-1.87E-06	0	-0	0	8.6E-05	6E-07	-1E-07
11	0.50	0.00	-0.52	-3.4E-10	-3.7E-08	-9.76E-10	0	-0	0	3.7E-08	5E-10	-2E-14
12	0.50	0.00	-0.52	-2.9E-13	-3.2E-11	-8.45E-13	0	-0	-0	3.2E-11	5E-13	-2E-20

Caso 2 - BFGS												
	U			deltaU			F			Tolerancias = 1e-9		
Ite	1	2	3	1	2	3	1	2	3	Dnorm	Fnorm	Enorm
-	0.60	0.10	0.60	-	-	-	0.3	-1.26	22.4	-	-	-
1	0.50	0.03	-0.52	-0.0975	-0.07097	-1.123151	0.01	-0.54	-0	1.12961	0.5358	25.1144
2	0.50	0.01	-0.52	-0.00208	-0.01641	0.0026835	0	-0.21	0.06	0.01676	0.2215	-0.0088
3	0.50	0.00	-0.52	-0.00038	-0.01113	-0.003266	0	-0.02	-0	0.01161	0.0245	-0.0022
4	0.50	0.00	-0.52	-4.4E-05	-0.00147	0.000147	-0	-0	0	0.00148	0.0003	-4E-05
5	0.50	0.00	-0.52	5.57E-06	-9.4E-06	-1.2E-05	0	0	0	1.6E-05	1E-05	1.7E-09
6	0.50	0.00	-0.52	-1.7E-08	5.48E-07	-3.01E-07	0	-0	-0	6.3E-07	2E-06	-3E-12
7	0.50	0.00	-0.52	-2.6E-08	-3.2E-08	9.696E-08	-0	0	0	1.1E-07	5E-07	1.4E-13
8	0.50	0.00	-0.52	4.63E-09	1.53E-08	-2.37E-08	0	0	-0	2.9E-08	2E-08	7E-15
9	0.50	0.00	-0.52	-2.9E-10	-3E-12	8.488E-10	0	0	0	9E-10	2E-09	1.4E-17
10	0.50	0.00	-0.52	4.61E-12	8.32E-11	-6.91E-11	0	0	-0	1.1E-10	3E-10	-5E-20

CASO 3 - FULL NEWTON-RAPHSON									
	U		deltaU		F		Tolerancias = 1e-9		
Ite	1	2	1	2	1	2	Dnorm	Fnorm	Enorm
-	0.50	3.00	-	-	7.5	6.75	-	-	-
1	0.12	2.73	-0.378787879	-0.27273	1.63	5.49	0.46676	0.800061	2.93939
2	0.09	2.49	-0.035287194	-0.23392	1.05	5.01	0.23657	0.049988	0.13789
3	0.08	2.49	-0.004011167	-0.00169	1	5	0.00435	5.34E-05	0.00021
4	0.08	2.49	-2.11062E-06	-2E-05	1	5	2E-05	2.46E-10	9E-10
5	0.08	2.49	-1.98937E-11	-5E-12	1	5	2.1E-11	0	5E-21

CASO 3 - NEWTON-RAPHSON MODIFICADO - ACTUALIZA K CADA 2 ITERACIONES									
	U		deltaU		F		Tolerancias = 1e-9		
Ite	1	2	1	2	1	2	Dnorm	Fnorm	Enorm
-	0.50	3.00	-	-	7.5	6.75	-	-	-
1	0.12	2.73	-0.378787879	-0.27273	1.63	5.49	0.46676	0.800061	2.93939
2	0.09	2.49	-0.035287194	-0.23392	1.05	5.01	0.23657	0.049988	0.13789
3	0.08	2.49	-0.003634432	-0.00134	1	5	0.00387	0.004857	0.00019
4	0.08	2.49	-0.000378794	-0.00037	1	5	0.00053	7.98E-07	2.1E-06
5	0.08	2.49	-5.14263E-08	-1.8E-07	1	5	1.9E-07	4.56E-10	1E-13
6	0.08	2.49	-3.46214E-11	-4.8E-11	1	5	6E-11	2.22E-16	2.1E-20

CASO 3 - NEWTON-RAPHSON MODIFICADO - ACTUALIZA K CADA 5 ITERACIONES									
	U		deltaU		F		Tolerancias = 1e-9		
Ite	1	2	1	2	1	2	Dnorm	Fnorm	Enorm
-	0.50	3.00	-	-	7.5	6.75	-	-	-
1	0.12	2.73	-0.378787879	-0.27273	1.63	5.49	0.46676	0.800061	2.93939
2	0.12	2.50	0.002785177	-0.22354	1.52	5.05	0.22356	0.523303	0.10882
3	0.08	2.54	-0.041818811	0.035334	1.02	5.1	0.05475	0.097979	0.02018
4	0.09	2.48	0.009469974	-0.05497	1.12	4.99	0.05578	0.115946	0.00502
5	0.08	2.49	-0.009770867	0.007667	1	5	0.01242	0.00043	0.00121
6	0.08	2.49	3.46538E-05	-0.00012	1	5	0.00012	7.1E-06	4E-08
7	0.08	2.49	-6.0302E-07	8.51E-07	1	5	1E-06	6.83E-08	5.4E-12
8	0.08	2.49	5.70633E-09	-1.5E-08	1	5	1.6E-08	9.41E-10	7.6E-16
9	0.08	2.49	-7.9886E-11	1.4E-10	1	5	1.6E-10	1.02E-11	1.1E-19

CASO 3 - NEWTON-RAPHSON MODIFICADO - ACTUALIZA K CADA 10 ITERACIONES									
	U		deltaU		F		Tolerancias = 1e-9		
Ite	1	2	1	2	1	2	Dnorm	Fnorm	Enorm
	0.50	3.00	-	-	7.5	6.75	-	-	-
1	0.12	2.73	-0.378787879	-0.27273	1.63	5.49	0.46676	0.800061	2.93939
2	0.12	2.50	0.002785177	-0.22354	1.52	5.05	0.22356	0.523303	0.10882
3	0.08	2.54	-0.041818811	0.035334	1.02	5.1	0.05475	0.097979	0.02018
4	0.09	2.48	0.009469974	-0.05497	1.12	4.99	0.05578	0.115946	0.00502
5	0.08	2.50	-0.011820597	0.020627	0.98	5.03	0.02377	0.032468	0.00159
6	0.08	2.49	0.004917397	-0.01785	1.03	4.99	0.01851	0.033646	0.00055
7	0.08	2.50	-0.003979215	0.009035	0.99	5.01	0.00987	0.0147	0.00021
8	0.08	2.49	0.002096942	-0.0064	1.01	5	0.00673	0.011415	7.8E-05
9	0.08	2.49	-0.001446226	0.003652	0.99	5	0.00393	0.00613	3E-05
10	0.08	2.49	0.000494586	-0.00152	1	5	0.0016	3.6E-06	7E-06
11	0.08	2.49	3.02277E-07	-3E-07	1	5	4.3E-07	3.04E-09	1.2E-12
12	0.08	2.49	2.55595E-10	-3.7E-10	1	5	4.5E-10	2.82E-12	1E-18

Caso 3 - BFGS									
	U		deltaU		F		Tolerancias = 1e-9		
Ite	1	2	1	2	1	2	Dnorm	Fnorm	Enorm
-	0.50	3.00	-	-	7.5	6.75	-	-	-
1	0.12	2.73	-0.378787879	-0.27273	1.63	5.49	0.46676	0.800061	2.93939
2	0.11	2.46	-0.00720019	-0.26352	1.38	4.96	0.26362	0.378303	0.13487
3	0.08	2.49	-0.034223614	0.031036	0.98	5.01	0.0462	0.025267	0.01413
4	0.08	2.49	0.002160656	-0.00321	1	5	0.00387	0.000445	7.1E-05
5	0.08	2.49	-3.7324E-05	6.87E-05	1	5	7.8E-05	7.37E-07	2.4E-08
6	0.08	2.49	6.77591E-11	3.52E-07	1	5	3.5E-07	2.56E-08	2.5E-13
7	0.08	2.49	1.6368E-09	5.74E-09	1	5	6E-09	1.49E-10	1.1E-16
8	0.08	2.49	1.22375E-11	-2.4E-12	1	5	1.2E-11	5.27E-13	1.8E-21

CASO 3 - Orden de Convergencia		
Full Newton- Raphson		
ITERACIÓN	U1	U2
1	N/A	N/A
2	0.9	32.1
3	3.5	0.9
4	1.5	3.4
5	N/A	N/A