GEOMETRÍA EUCLIDIANA
EJERCICIO RESUELTO

Sobre los lados iguales AB y AC de un triángulo isósceles $\triangle ABC$ se toman longitudes iguales $AE = AF$. Luego se unen los puntos E y F con el pie H de la altura. Demostrar que $m(E\hat{H}A) = m(A\hat{H}F)$ y que $m(E\hat{F}H) = m(F\hat{E}H)$.

Hipótesis: $\triangle ABC$ isósceles, $AE = AF$, $\overline{HA}$ altura.
Tesis: $m(E\hat{H}A) = m(A\hat{H}F)$, $m(E\hat{F}H) = m(F\hat{E}H)$.

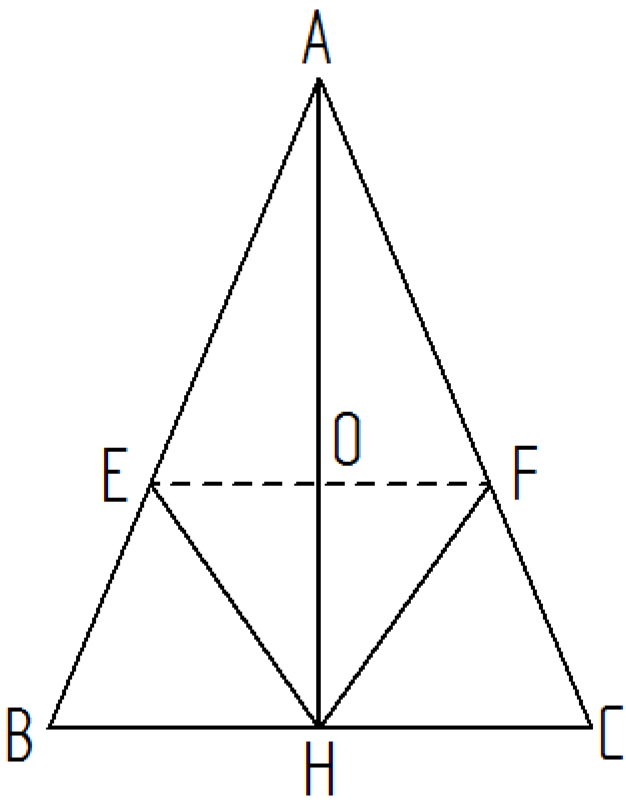

Figura 1:

Proposición	**Razón**
1. $AB = AC$.	Por Hipótesis.
2. a) $AB = AE + EB$ b) $AC = AF + FC$	Por suma de segmentos.
3. $AE = AF$	Por Hipótesis.
4. $AC = AE + FC$	Reemplazo 3 en 2b.
5. $AE + EB = AE + FC$	Igualo 2a y 4.
6. $EB = FC$	De 5. Por propiedad de igualdad en reales (aquí restamos AE a ambos lados de la igualdad).
7. $C\hat{B}A \cong A\hat{B}C$	Por Hipótesis y propiedad de triángulo isósceles (en un triángulo isósceles, los ángulos de la base son congruentes).
8. $HB = HC$	Por Hipótesis de triángulo isósceles y propiedad de isósceles (Teorema 2 de las propiedades del isósceles en documento guía: la altura coincide con la mediatriz).
9. $\triangle HBE \cong \triangle HCF$	Por criterio de congruencia LAL, de 6, 7 y 8.
10. $HE = HF$	Por ser lados correspondientes en triángulos congruentes, de 9.
11. $H\hat{E}B \cong H\hat{F}C$	Por ser ángulos correspondientes en triángulos congruentes, de 9.
12. $H\hat{E}A \cong H\hat{F}A$	Por ser ángulos suplementarios de ángulos congruentes (si dos ángulos son congruentes entonces sus suplementos también son congruentes. La suma de dos ángulos suplementarios es igual a 180 grados).
13. $\triangle HEA \cong \triangle HFA$	Por criterio de congruencia LAL, de 3, 10 y 12.
14. $E\hat{H}A \cong A\hat{H}F$	Por ser ángulos correspondientes en triángulos congruentes.
15. $m(E\hat{H}A) = m(A\hat{H}F)$	Por definición de congruencia.
16. Construyo el segmento de recta $\overline{EF}$. $\overline{AH}$ y $\overline{EF}$ son secantes en O.	Construcción auxiliar.
17. $\triangle EHF$ es isósceles.	Por definición de triángulo isósceles, de 10 y 16 (tiene dos lados congruentes).
18. $F\hat{E}H \cong E\hat{F}H$	Por Corolario 1 (ver título: CRITERIO LAL del documento guía: en todo triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados congruentes son congruentes).
19. $m(E\hat{F}H) = m(O\hat{E}H)$	Por definición de congruencia de ángulos (dice que dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida), de 18.

GEOMETRÍA EUCLIDIANA
TEOREMA DE TRAPECIO
Versión 1: 11 abril de 2015
Docente: Fredy Mercado.

La base media de un trapecio es paralela a las bases y es congruente con la semisuma de las bases mayor y menor, es decir:

$$\text{Base media} = \frac{\text{Base mayor} + \text{Base menor}}{2} \tag{1}$$

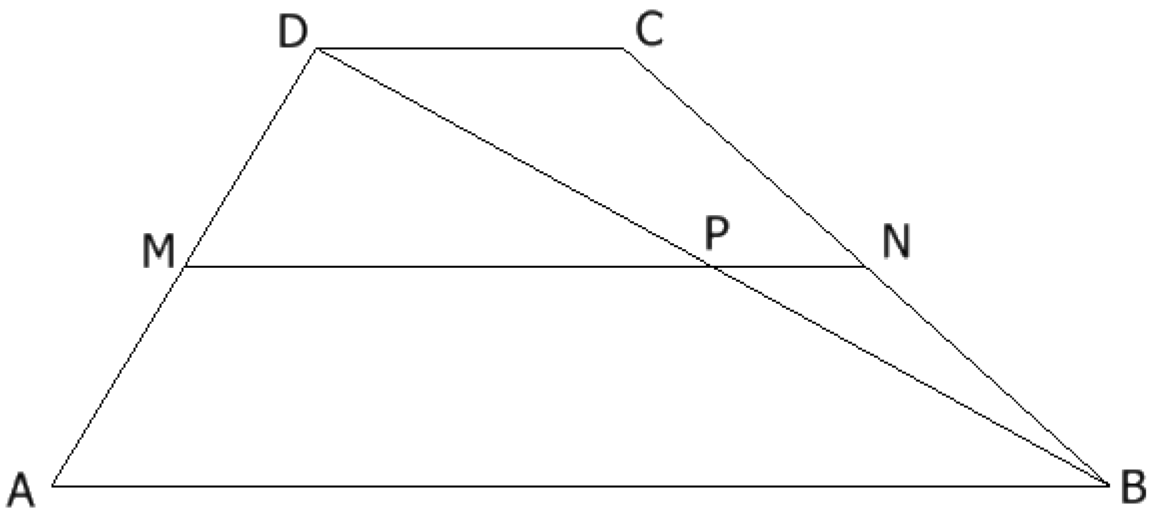

Figura 2:

Hipótesis:
ABCD trapecio cualquiera.
$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$
$\overline{AD} \sim\parallel \overline{BC}$

Tesis:
$\overline{MN} \parallel \overline{DC} \parallel \overline{AB}$
$MN = (AB + DC)/2$

Proposición	**Razón**
1. $AB \parallel DC$. $AD \sim\parallel BC$	Por definición de trapecio y por Hipótesis.
2. Trazo $\overline{DB}$, $\overline{MP}$, $\overline{PN}$ con M, P y N puntos medios de $\overline{DA}$, $\overline{DB}$ y $\overline{CB}$.	Por construcción (no sabemos si $\overline{MP}$ y $\overline{PN}$ pertenecen a la misma recta.
3. $\overline{MP}$ base media de $\triangle DAB$, $\overline{PN}$ base media de $\triangle BCD$.	Por 1. M y P son puntos medios de $\overline{DA}$ y $\overline{DB}$. N Punto medio de $\overline{CB}$.
4. $\overline{MP} \parallel \overline{AB}$ $MP = (1/2)AB$	Por 3 y teorema de base media ($\triangle DAB$).
5. $\overline{PN} \parallel \overline{DC}$ $PN = (1/2)DC$	Por 3 y teorema de base media ($\triangle BCD$).
6. $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$	Por definición de trapecio. Por hipótesis.
7. $\overline{MP} \parallel \overline{DC}$	Por transitividad entre 4a y 6.
8. P es punto común a $\overline{MP}$ y $\overline{PN}$	Por 2. Por construcción.
9. $\overline{MP}$ y $\overline{PN}$ pertenecen a la misma recta.	Por postulado de Euclides: por un punto exterior a una recta solamente pasa una recta paralela a dicha recta.
10. $MN = MP + PN$	Por suma de segmentos, de 9.
11. $MN = (1/2)AB + (1/2)DC$	Por sustitución de 4b y 5b en 10.
12. $MN = (AB + DC)/2$	Por propiedad de los reales.

TEOREMA DE TRAPECIO ISÓSCELES

Docente: Fredy Mercado.

Si en un trapecio se cumple que los ángulos adyacentes a una base son congruentes, entonces el trapecio es isósceles.

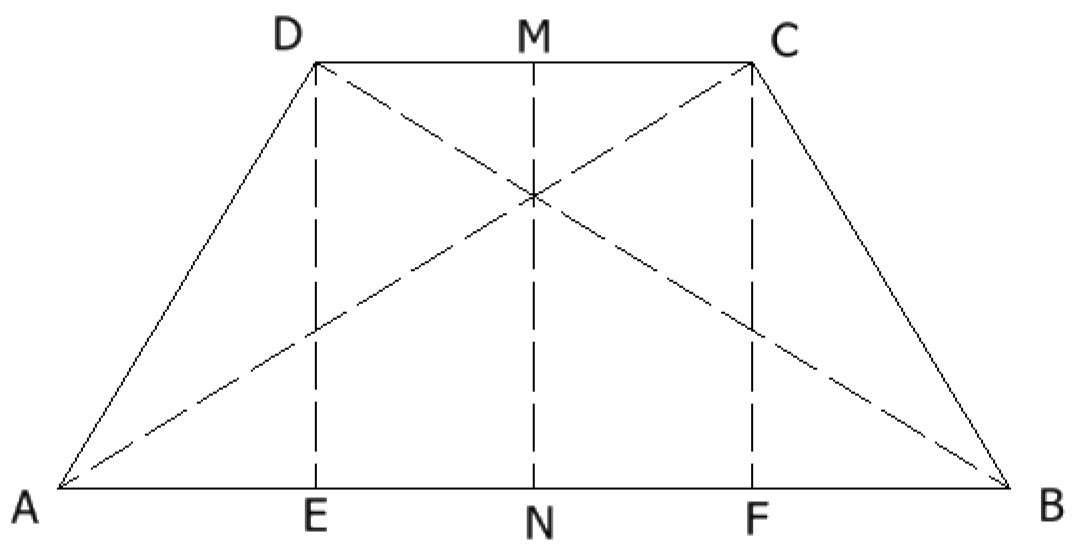

Figura 3:

GEOMETRÍA EUCLIDIANA
TEOREMA DE TRAPECIO ISÓSCELES
Versión 1: 11 abril de 2015
Docente: Fredy Mercado.

En todo trapecio isósceles se cumple que 2) los ángulos adyacentes a cada una de sus bases son congruentes y que 3) los ángulos opuestos son suplementarios.

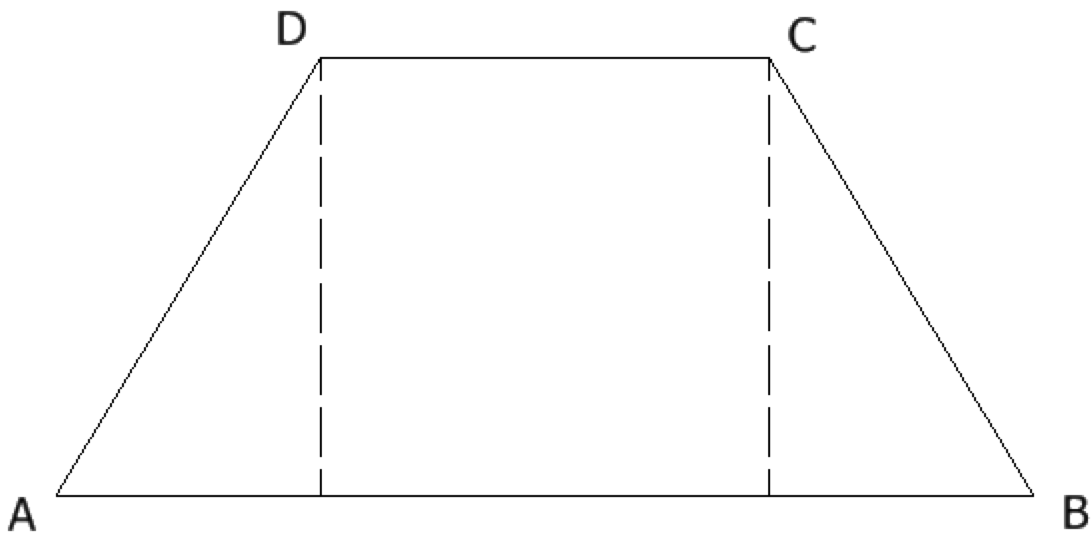

Figura 4:

Hipótesis:
ABCD trapecio isósceles.

Tesis:
T1: $B\hat{A}D \cong C\hat{D}A$
T2: $m(B\hat{A}D) + m(B\hat{C}D) = 180^o$
$m(C\hat{D}A) + m(A\hat{B}C) = 180^o$

Proposición	**Razón**
1. $AB \parallel DC$.	Por definición de trapecio isósceles y por Hipótesis.
$AD \sim\parallel BC$	
$AD \cong BC$	
2. Trazo alturas $\overline{DE}$ y $\overline{CF}$.	Por construcción.
3. $\overline{DE} \cong \overline{CF}$	Por teorema de distancia entre paralelas: dadas dos rectas paralelas, entonces la distancia de cualquier punto (de una de ellas) a la otra es una constante.
4. $\triangle ADE \cong \triangle BCF$	Por criterio ambiguo LLA (también llamado RHC sólo para triángulos rectángulos. Sólo aplica para lado mayor, lado menor y ángulo opuesto a lado mayor.
5. $\hat{A} \cong \hat{B}$ $(m(\hat{A}) = m(\hat{B}))$	Por ser ángulos correspondientes en triángulos congruentes, de 4.
6. $m(\hat{A}) + m(\hat{D}) = 180^o$	Por teorema de ángulos adyacentes a lados no paralelos en trapecios.
$m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180^o$	
7. $m(\hat{D}) = 180^o - m(\hat{A})$	Por propiedad de los reales, de 6a y 6b.
$m(\hat{C}) = 180^o - m(\hat{B})$	
8. $m(\hat{D}) = 180^o - m(\hat{B})$	Por sustitución de 5 en 7a.
9. $m(\hat{D}) = m(\hat{C})$	Por transitividad entre 7b y 8.
10. $m(\hat{A}) + m(\hat{C}) = m(\hat{B}) + m(\hat{D}) = 180^o$	Por sustitución de 9 en 6a y 6b.

TEOREMA DE TRAPECIO ISÓSCELES

Docente: Fredy Mercado.

Si en un trapecio se cumple que las mediatrices de las bases coinciden, entonces el trapecio es isósceles.

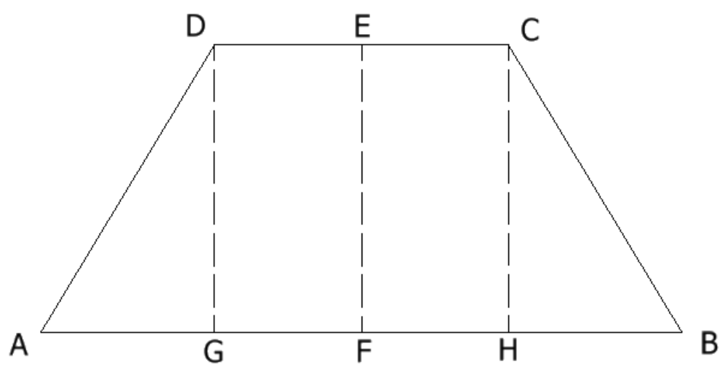

Figura 5:

EJEMPLO CRITERIO SAA

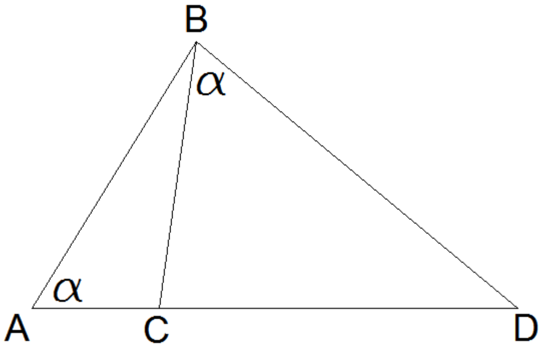

Figura 6:

Hipótesis:
$\triangle ABC$ cualquiera.
$\hat{A} \cong C\hat{B}D$.

Tesis:
$BD^2 = AD \cdot CD$

Proposición	**Razón**
1. $\hat{A} \cong C\hat{B}D$.	Por Hipótesis.
2. $A\hat{D}B \cong C\hat{D}B$.	Por ser ángulo común y A-C-D.
3. $\triangle A\hat{D}B \sim B\hat{D}C$.	Por criterio de semejanza SAA. De 1 y 2.
4. $$\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{DC}$$	Por propiedad de semejanza de triángulos. De 3.
5. $BD^2 = AD \cdot DC$	Por propiedad de proporciones. De 4.

DEMOSTRACIÓN CATETO MEDIA PROPORCIONAL, ALTURA MEDIA PROPORCONAL Y TEOREMA DE PITÁGORAS

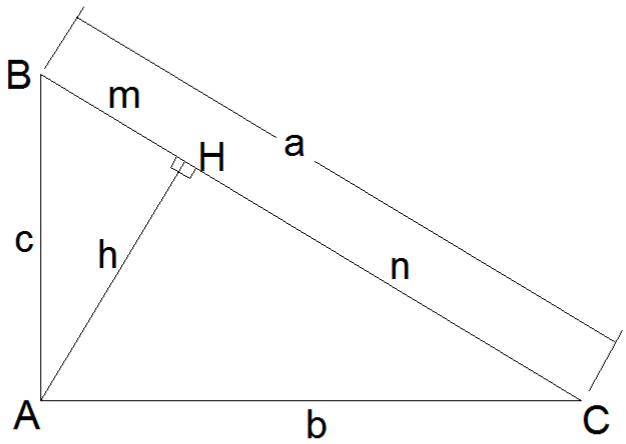

Figura 7:

Hipótesis:
$\triangle ABC$ rectángulo en A. $\overline{AH}$ altura relativa a la hipotenusa.

Tesis:
$b^2 = a \cdot n.$ $\quad c^2 = a \cdot m.$ $\quad h^2 = m \cdot n.$ $\quad a^2 = b^2 + c^2$

Proposición	**Razón**
1. $\triangle CHA \sim \triangle ABC$ y $\triangle AHB \sim \triangle ABC$.	Por teorema de altura relativa a la hipotenusa (semejanza).
2. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{n} = \dfrac{c}{h} \quad \text{y} \quad \dfrac{a}{c} = \dfrac{c}{m} = \dfrac{b}{h}$.	Por propiedad de semejanza de triángulos entre $\triangle CHA$ y $\triangle ABC$ y entre $\triangle AHB$ y $\triangle ABC$. De 1.
3. $b^2 = a \cdot n \quad \text{y} \quad c^2 = a \cdot m.$	Por propiedad de las proporciones. De 2.
4. $\triangle CHA \sim \triangle AHB$	Por teorema de altura relativa a la hipotenusa (semejanza).
5. $\dfrac{n}{h} = \dfrac{h}{m} = \dfrac{b}{c}$	Por propiedad de semejanza entre $\triangle CHA$ y $\triangle AHB$.
6. $h^2 = m \cdot n$	Por propiedad de las proporciones. De 5.
7. $b^2 + c^2 = a \cdot n + a \cdot m$	Por suma de 3a y 3b.
8. $b^2 + c^2 = a(n + m)$	Por propiedad de los reales. De 7.
9. $b^2 + c^2 = a \cdot a$	Por sustitución de $(a = n + m)$ en 8.
10. $a^2 = b^2 + c^2$	Por propiedad de los reales. De 9.