

TRABAJO PRÁCTICO # 1
SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL ESCURRIMIENTO HIDRODINÁMICO
UNIDIMENSIONAL



POR:
FREDY ANDRÉS MERCADO NAVARRO.
Pasaporte: 98.773.532.
Maestría en Simulación Numérica y Control.
Fecha: 27 de octubre.

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
CIUDAD AUTÓNOMA DE BUENOS AIRES
ARGENTINA
2011

INDICE DE CONTENIDOS

1. INTRODUCCIÓN	5
2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	6
3. ESQUEMA UPWIND EXPLÍCITO DE PRIMER ORDEN	7
3.1 Discretización del modelo diferencial	7
3.1.1 Discretización de las condiciones iniciales y de borde	7
3.2 Análisis de Consistencia	8
3.3 Ensayos numéricos	8
3.4 Análisis de errores	11
3.5 Solución Numérica	13
3.6 Ensayos de Sensibilidad	13
3.6.1 Variando el Coeficiente de Manning	14
3.6.2 Variando la Pendiente del Canal	15
4. ESQUEMA UPWINDING IMPLÍCITO DE PRIMER ORDEN	17
4.1 Discretización del modelo diferencial	17
4.1.1 Discretización de las condiciones iniciales y de borde	17
4.2 Análisis de consistencia	17
4.3 Ensayos numéricos	18
4.4 Análisis de errores	20
4.5 Solución Numérica	21
4.6 Ensayos de Sensibilidad	22
4.6.1 Variando el Coeficiente de Manning	23
4.6.2 Variando la Pendiente del Canal	24
5. ESQUEMA LAX-WENDROFF EXPLÍCITO DE SEGUNDO ORDEN	26
5.1 Discretización del modelo diferencial	26
5.1.1 Discretización de las condiciones iniciales y de borde	27
5.2 Análisis de consistencia	27
5.3 Ensayos numéricos	27
5.4 Análisis de errores	29
5.5 Solución Numérica	30
5.6 Ensayos de Sensibilidad	30
5.6.1 Variando el Coeficiente de Manning	30

5.6.2 Variando la Pendiente del Canal	32
---	----

INDICE DE TABLAS

Tabla 1. Gráficas Solución Analítica vs. Solución Numérica para un tiempo de 60 horas (6 periodos).....	10
Tabla 2. Cálculo del error RMS de la solución por diferencias finitas para esquema Upwind Explícito.....	12
Tabla 3. Parámetros de cálculo para ensayos con el Coeficiente de Rugosidad.	14
Tabla 4. Parámetros de cálculo para ensayos con la pendiente del canal.	15
Tabla 5. Gráficas Solución Analítica vs. Solución Numérica para un tiempo de 60 horas (6 periodos).....	19
Tabla 6. Cálculo del error RMS de la solución por diferencias finitas para esquema Upwind Implícito.....	20
Tabla 7. Parámetros de Simulación para solución por Upwind Implícito O1.....	21
Tabla 8. Parámetros de cálculo para ensayos con el Coeficiente de Rugosidad.	23
Tabla 9. Parámetros de cálculo para ensayos con la pendiente del canal.	24
Tabla 10. Gráficas Solución Analítica vs. Solución Numérica para un tiempo de 60 horas (6 periodos).	28
Tabla 11. Cálculo del error RMS de la solución por diferencias finitas para esquema Lax-Wendroff.	29
Tabla 12. Parámetros de Simulación para solución por Lax-Wendroff.....	30
Tabla 13. Parámetros de cálculo para ensayos con el Coeficiente de Rugosidad.	31
Tabla 14. Parámetros de cálculo para ensayos con la pendiente del canal.	32

INDICE DE FIGURAS

Figura 1. Solución con el paso del tiempo. Upwind Explícito O1. $x=120$ km aprox.....	11
Figura 2. Gráfica del error RMS para Esquema Upwind Explícito de orden 1.	12
Figura 3. Solución Numérica óptima – Esquema Upwind Explícito.....	13
Figura 4. Soluciones mediante Upwind Explícito O1. $C_r=1$. $\Delta t=20$ s.	14
Figura 5. Ensayo Upwind Explícito O1. Manning=0.005.	14
Figura 6. Ensayo Upwind Explícito O1. Manning=0.1.	15
Figura 7. Ensayo Upwind Explícito O1. Pendiente= $2.0e-6$	16
Figura 8. Ensayo Upwind Explícito O1. Pendiente= $2.0e-4$	16
Figura 9. Solución con el paso del tiempo. Upwind Implícito O1. $x=120$ km aprox.....	20
Figura 10. Gráfica del error RMS para Esquema Upwind Explícito de orden 1.....	21
Figura 11. Solución Numérica óptima – Esquema Upwind Implícito.....	22

Figura 12. Solucion mediante Upwind Explícito O1. $Cr=5$. $Dt=42.1875$ s.....	22
Figura 13. Ensayo Upwind Explícito O1. Manning=0.006.	23
Figura 14. Ensayo Upwind Explícito O1. Manning=0.05.	23
Figura 15. Ensayo Upwind Implícito O1. Pendiente= $2.0e-6$	24
Figura 16. Ensayo Upwind Implícito O1. Pendiente= $6.0e-5$	25
Figura 17. Solución con el paso del tiempo. Lax-Wendroff O2. $x=120$ km aprox.	29
Figura 18. Gráfica del error RMS para Esquema Lax-Wendroff de orden 2.....	29
Figura 19. Solución Numérica Óptima – Esquema Lax-Wendroff.	30
Figura 20. Ensayo Lax-Wendroff O2. Manning 0.005.....	31
Figura 21. Ensayo Lax-Wendroff O2. Manning=0.07.....	31
Figura 22. Ensayo Lax-Wendroff O2. Pendiente= $2.0e-6$ m/m.	32
Figura 23. Ensayo Lax-Wendroff O2. Pendiente= $1.75e-4$ m/m.....	32
Figura 24. Solución Analítica para un periodo de la función forzante.	34

1. INTRODUCCIÓN

La clasificación según el orden de las ecuaciones diferenciales parte de una ecuación diferencial de segundo orden como la siguiente:

$$A \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + D \frac{\partial \phi}{\partial x} + E \frac{\partial \phi}{\partial y} + F\phi + G = 0$$

Donde los coeficientes A , B , C , D , E , F , y G son funciones de las variables independientes x y y , y de la variable dependiente ϕ .

Estas se clasifican como:

Elípticas, si $B^2 - 4AC < 0$.

Parabólicas, si $B^2 - 4AC = 0$

Hiperbólicas, si $B^2 - 4AC > 0$

Para nuestro problema estamos en presencia de una ecuación hiperbólica de primer orden, la cual posee la forma:

$$D \frac{\partial \phi}{\partial x} + E \frac{\partial \phi}{\partial y} + F\phi = 0$$

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La misión del presente trabajo es aproximar de la mejor forma posible y mediante el método de Diferencias Finitas, la solución de una ecuación diferencial en derivadas parciales y sus condiciones iniciales y de borde, las cuales constituyen un modelo matemático del comportamiento de una onda de marea que se propaga desde el mar hacia aguas arriba de un caudal de agua que desemboca en el mar. El modelo diferencial es unidimensional, de tal forma que las derivadas parciales están calculadas con respecto al tiempo y a la variable espacial x .

Para el desarrollo del Trabajo práctico se seleccionaron los métodos de Upwind Explícito de primer orden, Upwind Implícito de primer orden y Lax-Wendroff de segundo orden. La ecuación diferencial del modelo fue discretizada mediante estos tres métodos e implementada a través del código computacional de Matlab ®.

La ecuación diferencial del modelo es la ecuación de onda unidimensional:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \psi \eta = 0$$

x : coordenada espacial [m].

t : coordenada temporal [s].

η : forma de la onda de crecida [m].

c_g : celeridad de la onda de gravedad [m/s].

Ψ : factor de atenuación [1/s].

Condición de borde aguas abajo:

$$\eta(x = L, t) = a_0 \sin \left(\frac{2\pi \cdot t}{t_0} \right)$$

a_0 : amplitud de la onda.

t_0 : periodo de la onda.

3. ESQUEMA UPWIND EXPLÍCITO DE PRIMER ORDEN

3.1 Discretización del modelo diferencial

La ecuación diferencial discretizada mediante el método de diferencias finitas Upwind Explícito de primer orden en x y en t es:

$$\frac{\eta_i^{n+1} - \eta_i^n}{\Delta t} + c_g \frac{\eta_i^n - \eta_{i-1}^n}{\Delta x} + \Psi \eta_i^n = 0; c_g > 0$$

Ecuación 1

Es necesario clarificar que el valor calculado de c_g es negativo, lo cual implica que la celeridad tiene dirección en el sentido del eje x decreciente. Por comodidad para el análisis, se asumirá que el valor de c_g es positivo y se trabajará con la ecuación en diferencias anterior. De lo contrario, sería necesario tomar una ecuación en diferencias de la forma:

$$\frac{\eta_i^{n+1} - \eta_i^n}{\Delta t} + c_g \frac{\eta_{i+1}^n - \eta_i^n}{\Delta x} + \Psi \eta_i^n = 0; c_g < 0$$

Despejando de la ecuación en diferencias para el paso temporal $n+1$ tenemos:

$$\eta_i^{n+1} = \eta_i^n + c_g \frac{\Delta t}{\Delta x} (\eta_i^n - \eta_{i-1}^n) - \Psi \Delta t \eta_i^n$$

Para simplificar, se definirá el número de Courant como:

$$c = c_g \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

De esta manera, la ecuación en diferencias finitas adopta la forma:

$$\eta_i^{n+1} = (1 + c - \Psi \Delta t) \eta_i^n - c \eta_{i-1}^n$$

3.1.1 Discretización de las condiciones iniciales y de borde

Ahora discretizamos las condiciones de borde del problema:

$$\eta_0^n = a_0 \sin\left(\frac{2\pi n \Delta t}{t_0}\right)$$

La ecuación anterior implica que la condición de borde aplica para cualquier paso temporal n en el paso espacial $i=0$. El paso espacial i se incrementa en el sentido aguas arriba de la corriente del canal.

Dado que se requiere una condición inicial en $t=0$, tenemos:

$$\eta_i^0 = 0 \quad \text{Condición de borde de Dirichlet.}$$

La condición anterior indica que sobre el paso temporal cero el valor de la solución para cualquier distancia sobre el canal es cero. A partir de este valor en $t=0$ el programa de cálculo aplica las diferencias finitas, generando soluciones completas para cada paso temporal, y continuando en forma sucesiva hasta completar cinco oscilaciones completas de nuestra función senoidal forzante.

3.2 Análisis de Consistencia

Un esquema de discretización es llamado Consistente, si la solución de las ecuaciones discretizadas converge a la solución de las ecuaciones diferenciales dadas. Un esquema consistente nos da la seguridad de que realmente se están resolviendo las ecuaciones que gobiernan nuestro problema y no otras.

El método Upwind Explícito de primer orden aplicado al problema de escurrimiento unidimensional será entonces Consistente si cuando $\Delta t \rightarrow 0$ y $\Delta x \rightarrow 0$ mi error de truncamiento tiende a cero. El desarrollo matemático es como sigue:

Tomando como punto de partida la Ecuación 1, desarrollamos en series de Taylor los siguientes términos:

$$\eta_i^{n+1} = \eta_i^n + \Delta t \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial t^3} + O(\Delta t)^4$$

$$\eta_{i-1}^n = \eta_i^n - \Delta x \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} + O(\Delta x)^4$$

Reemplazando el desarrollo de los dos términos anteriores en la Ecuación 1, cancelando términos y reagrupando obtenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \psi \eta = -\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial t^3} + c_g \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{\Delta x^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} + O(\Delta x^3 + \Delta t^3)$$

Ecuación 2

De la Ecuación 2 podemos concluir que cuando $\Delta t \rightarrow 0$ y $\Delta x \rightarrow 0$ el miembro derecho tiende a cero. Este miembro representa el error de truncamiento, de donde concluimos que la reducción de los pasos temporales y espaciales tienden a llevarme a resolver en forma exacta el modelo diferencial de nuestro problema.

3.3 Ensayos numéricos

Tras las labores de programación del esquema se desarrollaron diversos ensayos numéricos. Para la mejor comprensión de nuestro problema, hacemos hincapié en las dimensiones de nuestro problema. Nuestra primera escala será el periodo de la onda de marea, la cual es la función forzante de nuestro problema. Este periodo es de 6 horas o 21600 segundos. Tomaremos los puntos de inflexión de esta función, es decir, el máximo, el mínimo y el punto donde el signo cambia ($\eta = 0$) para dividir nuestro periodo en tramos de curva que serán nuestra segunda escala, es decir, el tiempo que

tarda nuestra función forzante para ir de un punto de inflexión al siguiente. Este tiempo (5400 segundos) lo dividimos por 10 (mucho menor que la escala) para determinar el Δt con el cual iniciamos nuestra aproximación. Luego determinamos seleccionar un Courant=1 a partir de las sugerencias de la literatura en las cuales se halla que para problemas de tipo hiperbólico con los métodos a utilizar para nuestro problema, el $Cr=1$ otorga una solución estable. Naturalmente, esto será comprobado más adelante.

Los resultados de los ejercicios de cálculo indican que la solución numérica es estable para Números de Courant $0 < Cr \leq 1$. Se realizaron ensayos en este intervalo para $0 < \Delta t \leq 5000$, hallándose que todas las soluciones se estabilizan con el paso del tiempo. Para hallar estabilidad con $\Delta t = 5000$ segundos se requirió un intervalo de tiempo cercano a 240 horas (40 periodos). Naturalmente, la estabilidad se determinó para una longitud del canal de 200 km, ampliando en ocasiones este intervalo hasta 400 km para observar el comportamiento de la solución.

Para números de Courant $Cr > 1$ la solución es inestable y diverge. No obstante lo anterior, de acuerdo a los ensayos, es posible obtener soluciones aproximadas que sean estables dentro de cierto intervalo espacial, modificando el Δt . A modo de ejemplo esto podría ser verificado para $1 < Cr \leq 1.2$ variando también delta t en el intervalo $0 < \Delta t \leq 2000$.

En la Tabla 1 se puede apreciar la variación de la estabilidad de la solución variando Δt y el número de Courant Cr . La precisión de la solución aumenta con la disminución de Δt , y de igual manera, aumenta cuando el Courant tiende a uno, aproximándose desde números menores que el Courant. Para números de Cr mayores que 1 la solución oscila hasta hacerse inestable, donde finalmente, diverge.

Tabla 1. Gráficas Solución Analítica vs. Solución Numérica para un tiempo de 60 horas (6 periodos).

	Delta de tiempo – Dt [s]		
Cr	337.5	675	1350
0.2			
0.5			
1			
1.2			
	<p> Solución Analítica Discretizada. Solución Numérica. </p> <p> Los ejes X de las gráficas indican la Coordenada Espacial (varían entre 0 y 200 km). Los ejes Y de las gráficas indican la Forma de la Onda (varían entre -0.05 y 0.01 m). </p>		

La estabilidad de la solución numérica depende de la longitud sobre la cual requerimos calcular la solución. Para nuestro problema esta condición es de 200 km, que representa la longitud del canal. Realizando ensayos para el caso particular de $Cr=1.1$ y diversos Dt , se determinó, a modo de ejemplo, que seleccionando un $Dt=250$ segundos, la solución es estable para una distancia sobre el canal entre 0 y 140 km. Entre 140 y 200 km la solución se hace inestable y diverge a valores mucho mayores o mucho menores que la amplitud de la onda de la función forzante (± 0.1 m).

A continuación, en la Figura 1 se observa el comportamiento oscilatorio de la solución con el avance en el tiempo. Para un $Cr=1$, a medida que Δt decrece, se reduce el error de amplitud de la onda y el error de fase que provoca la desviación horizontal de la solución numérica.

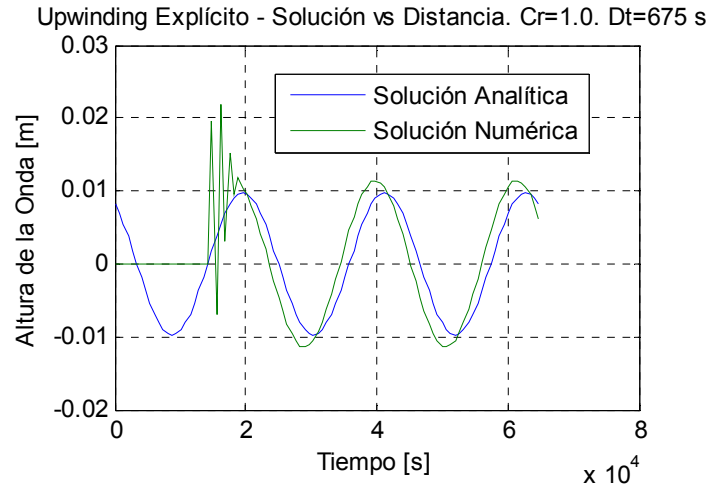


Figura 1. Solución con el paso del tiempo. Upwind Explícito O1. $x=120$ km aprox.

3.4 Análisis de errores

El error a calcular a continuación corresponde al error entre la solución analítica del problema y la solución discreta otorgada por la ecuación en diferencias finitas. Este error será calculado por medio de la Raíz de la Desviación Cuadrática Media (en Inglés Root Mean-Square Deviation o Root Mean-Square Error) el cual es un número utilizado con frecuencia para medir la diferencia entre los valores predichos por un modelo y los valores observados o, como en este problema, entre los valores predichos por nuestro modelo analítico y nuestro modelo en diferencias finitas.

La raíz de la desviación cuadrática media será entonces la medida de precisión entre la solución analítica y un modelo en diferencias finitas y otro, o entre la solución analítica y un mismo modelo pero variando los números Cr , Δt y Δx .

La fórmula a ser utilizada es:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\eta_{analítica,i} - \eta_{EDF,i})^2}{n}}$$

Donde:

$\eta_{analítica,i}$: representa un valor de la solución analítica en para una distancia sobre el canal x y un tiempo t .

$\eta_{EDF,i}$: representa un valor de la solución de la Ecuación en Diferencias Finitas para la misma distancia sobre el canal x y el mismo tiempo t .

Tabla 2. Cálculo del error RMS de la solución por diferencias finitas para esquema Upwind Explícito.

Raíz de la Desviación Cuadrática Media [m]				
	Delta t [s]			
Courant	337.5	675	1350	2700
0.2	0.0054	0.0083	0.0095	0.0177
0.4	0.0030	0.0053	0.0086	0.0115
0.6	0.0021	0.0039	0.0069	0.0120
0.8	0.0016	0.0032	0.0060	0.0112
1.0	0.0014	0.0027	0.0054	0.0108

De acuerdo a los resultados expuestos en la Tabla 2, mientras más pequeño el número del error, menos desviación existe entre la solución analítica y la solución numérica. Para los datos de la tabla, esto se logra para un Delta $t=337.5$ y $Cr=1.0$.

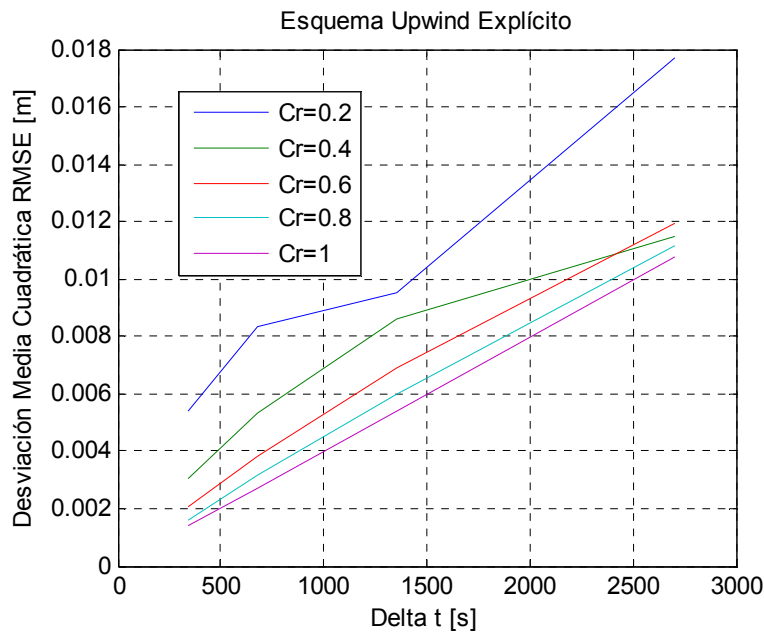


Figura 2. Gráfica del error RMS para Esquema Upwind Explícito de orden 1.

De la Tabla 2 y la Figura 2 se puede concluir que el error RMS varía en forma lineal para números de Courant aproximados a 1. Para $Cr=1$ el valor de la pendiente es de $4.0e-6$, lo que nos da una medida de la desviación que posee un cálculo para $Cr=1$ a cualquier Dt entre 0 y 2700 segundos.

De esta manera, hemos podido comprobar que para números de Courant cercanos a 1 por debajo, el orden del error en t es proporcional a Δt , ya que, a modo de ejemplo, si disminuimos Δt a la mitad nuestro error se reduce también a la mitad. Ver $Cr=0.8$ y 1.0 en la Tabla 2.

3.5 Solución Numérica

En la Figura 3 se observa la gráfica de la solución analítica vs. la solución numérica. Esta solución fue hallada disminuyendo al máximo posible el valor de Δt . Las soluciones se encuentran prácticamente superpuestas debido a que el paso temporal utilizado es de 10 segundos, con un $Cr=1.0$. El error RMS calculado arroja un valor de $4.2219e-5$ metros.

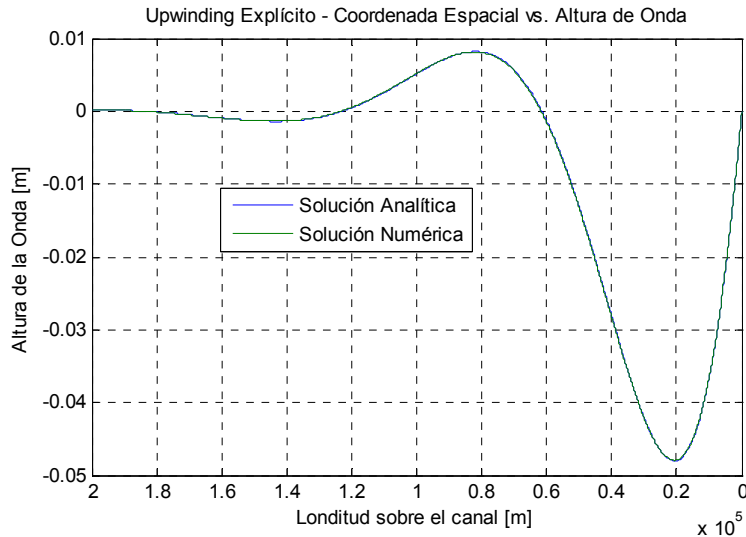


Figura 3. Solución Numérica óptima – Esquema Upwind Explícito.

3.6 Ensayos de Sensibilidad

A continuación se desarrollan ensayos de la solución variando el Coeficiente adimensional de Manning y la Pendiente del canal. Los resultados de los cálculos numéricos serán graficados y comparados con una solución a un Δt de 20 segundos. No se emplea la solución con un Δt de 10 segundos debido a que el costo computacional es demasiado alto, lo que produce un agotamiento bastante notorio de los recursos del computador utilizado para los cálculos. Incrementando el Δt hasta 20 segundos el análisis es mucho más ágil.

Las variaciones en la solución serán comparadas con la solución observada en la Figura 4.

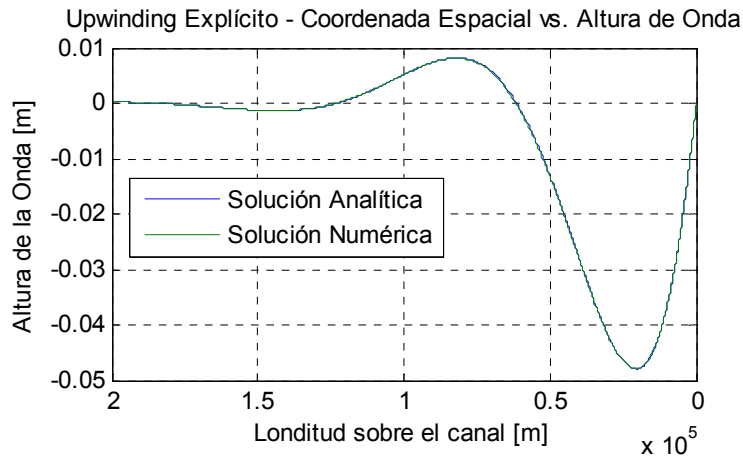


Figura 4. Soluciones mediante Upwind Explícito O1. Cr=1. Dt=20 s.

3.6.1 Variando el Coeficiente de Manning

Tabla 3. Parámetros de cálculo para ensayos con el Coeficiente de Rugosidad.

Variable	Valor
Courant	1.0
Delta t	20 segundos
Tiempo de solución	60 horas
Coef. Manning	Variable
Pend. Canal	2.0e-5

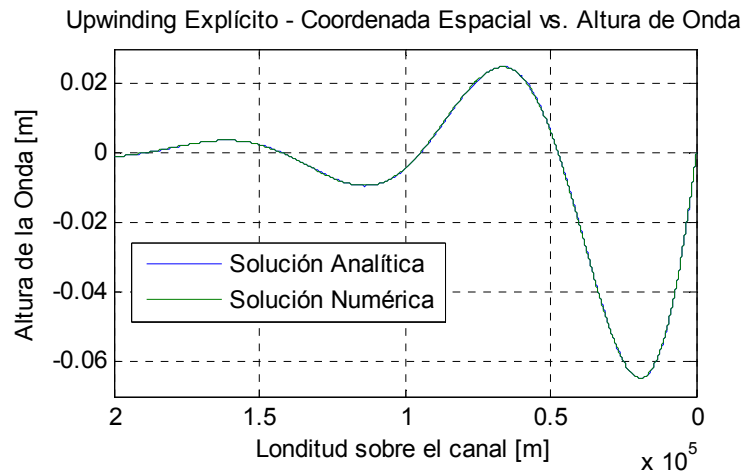


Figura 5. Ensayo Upwind Explícito O1. Manning=0.005.

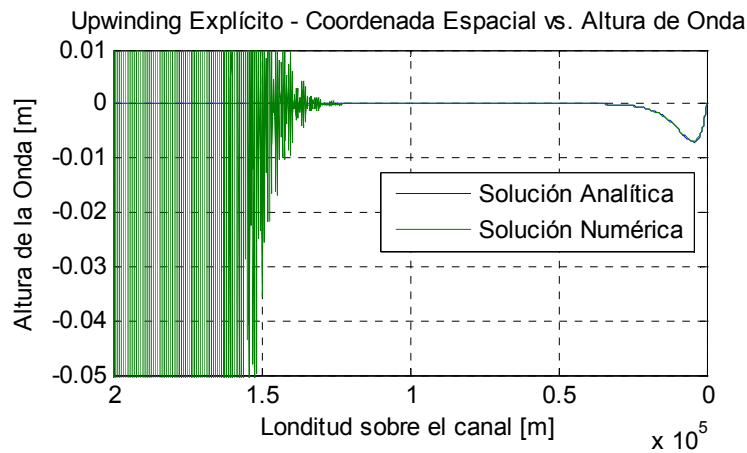


Figura 6. Ensayo Upwind Explícito O1. Manning=0.1.

El incremento de la rugosidad de Manning produce una disminución de la velocidad del flujo, lo cual disminuye el Número de Froude e incrementa el parámetro de frecuencia. Los cálculos arrojan un incremento del factor de atenuación. Esto aminora rápidamente la naturaleza oscilatoria de la solución a lo largo del canal. Para rugosidades menores a 0.01 la tendencia es opuesta, ver Figura 5, y la energía impuesta por el forzante se conserva con la distancia. Para rugosidades que se alejan del valor de 0.01 hacia el incremento, producen la inestabilidad numérica de la solución, observándose el crecimiento de los errores con la distancia, tal como se aprecia en la Figura 6.

3.6.2 Variando la Pendiente del Canal

Tabla 4. Parámetros de cálculo para ensayos con la pendiente del canal.

Variable	Valor
Courant	1.0
Delta t	20 segundos
Tiempo de solución	60 horas
Coef. Manning	0.01
Pend. Canal	<i>Variable</i>

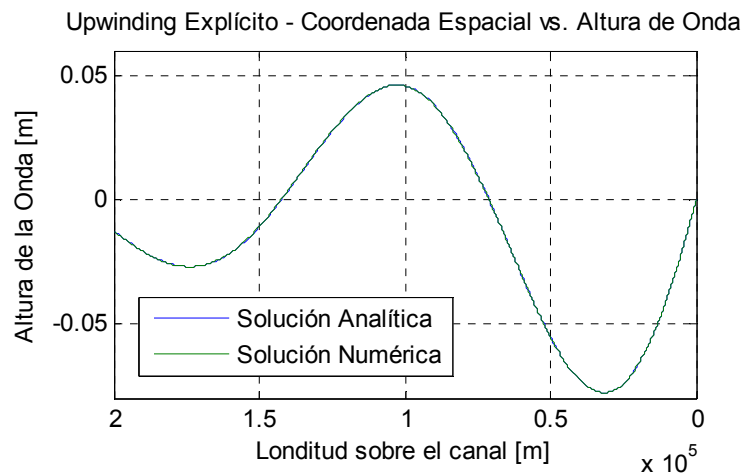
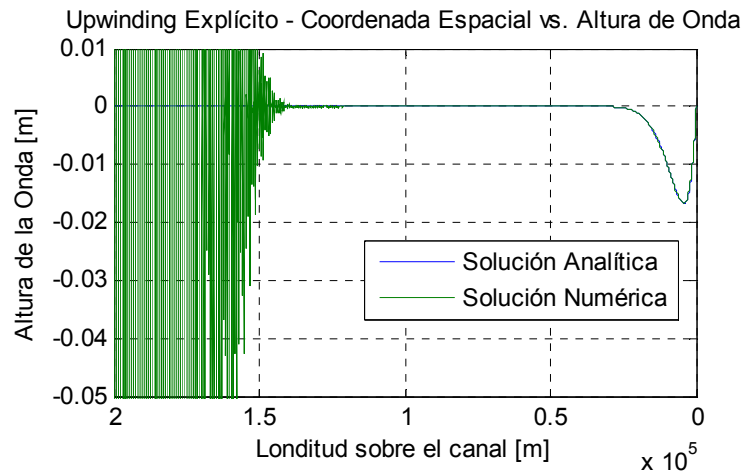


Figura 7. Ensayo Upwind Explícito O1. Pendiente= $2.0e-6$.**Figura 8.** Ensayo Upwind Explícito O1. Pendiente= $2.0e-4$.

El incremento de la pendiente incrementa la velocidad del flujo, el Froude y el parámetro de frecuencia. Esto produce también un incremento del Factor de Atenuación. La conclusión de la variación de la Pendiente del Canal sobre la solución numérica es análoga a la producida por la variación de la rugosidad. Para números de Pendiente menores a $2.0e-5$ la energía del forzante se conserva con la distancia, ver Figura 7. Para números mayores a $2.0e-5$ la onda se atenúa rápidamente y con el avance sobre la distancia los errores crecen y producen la divergencia de la solución numérica, ver Figura 8.

4. ESQUEMA UPWINDING IMPLÍCITO DE PRIMER ORDEN

4.1 Discretización del modelo diferencial

La ecuación diferencial discretizada mediante el método de diferencias finitas Upwind Implícito de primer orden en x y en t es:

$$\frac{\eta_i^{n+1} - \eta_i^n}{\Delta t} + c_g \frac{\eta_i^{n+1} - \eta_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} + \Psi \eta_i^n = 0$$

Ecuación 3

Este esquema de diferencias finitas permite el cálculo explícito de la solución. Despejando la ecuación anterior para el paso temporal $n+1$ en el paso espacial i tenemos:

$$\eta_i^{n+1} = \frac{1}{a(1+c)} \eta_i^n + \frac{c}{(1+c)} \eta_{i-1}^{n+1}$$

Lo anterior para:

$$c = c_g \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$a = \frac{1}{1 - \Psi \Delta t}$$

Donde c corresponde al número de Courant.

La condición de borde y la condición inicial fueron discretizadas para el análisis explícito en el numeral 4 de este trabajo. Estas aplican de igual forma para el análisis implícito.

4.1.1 Discretización de las condiciones iniciales y de borde

Las condiciones iniciales y de borde han sido discretizadas tal y como se observa en el numeral 3.1.1.

4.2 Análisis de consistencia

El método Upwind Implícito de primer orden aplicado al problema de escurrimiento unidimensional será Consistente si cuando $\Delta t \rightarrow 0$ y $\Delta x \rightarrow 0$ mi error de truncamiento tiende a cero. El desarrollo matemático es como sigue:

Tomando como punto de partida la Ecuación 3, desarrollamos en series de Taylor los siguientes términos:

$$\eta_i^{n+1} = \eta_i^n + \Delta t \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial t^3} + O(\Delta t)^4$$

$$\eta_{i-1}^{n+1} = \eta_i^n + \Delta t \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial t^3} + O(\Delta t)^4 - \Delta x \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} + O(\Delta x)^4$$

Reemplazando el desarrollo de los dos términos anteriores en la Ecuación 3, cancelando términos y reagrupando obtenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \psi \eta = -\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial t^3} + c_g \Delta x \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \Delta x^2 \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} + O(\Delta x^3 + \Delta t^3)$$

Ecuación 4

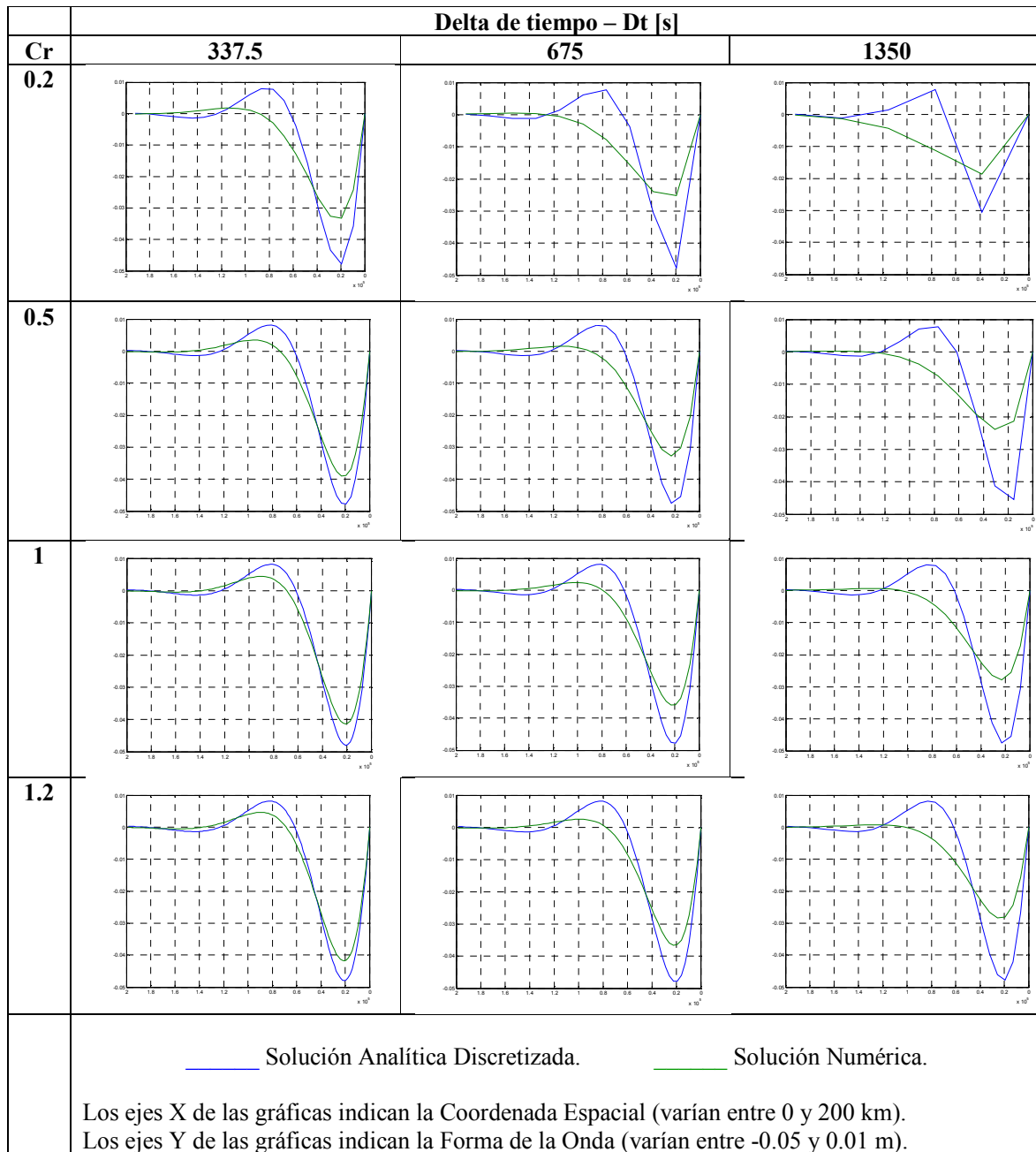
De la Ecuación 4 podemos concluir que cuando $\Delta t \rightarrow 0$ y $\Delta x \rightarrow 0$ el miembro derecho tiende a cero. Este miembro representa el error de truncamiento, de donde concluimos que la reducción de los pasos temporales y espaciales tienden a llevarme a resolver en forma exacta el modelo diferencial de nuestro problema.

4.3 Ensayos numéricos

La solución numérica del esquema Upwind Implícito es incondicionalmente estable, de acuerdo a los ensayos numéricos desarrollados. Se realizaron ensayos para $0 < \Delta t \leq 5000$ y diferentes números de Courant, hallándose que las soluciones son estables cualquier valor de Cr y Dt.

En la Tabla 5 se puede apreciar la variación del comportamiento de la solución variando Δt y el número de Courant Cr. La precisión de la solución aumenta con la disminución de Δt , y de igual manera, aumenta cuando el Courant tiende a uno. Una particularidad de este método es el aparente incremento de la exactitud de la solución con el incremento de Cr. Estos resultados serán confirmados o desmentidos más adelante con el cálculo del error RMS.

Tabla 5. Gráficas Solución Analítica vs. Solución Numérica para un tiempo de 60 horas (6 periodos).



En la Figura 9 se observa un resultado similar al otorgado para la misma gráfica del método Upwind Explícito, sin embargo, este método permanece estable aún desde los primeros pasos temporales. A pesar de esta ventaja, la exactitud de la solución numérica ha decrecido tanto en amplitud como en fase o, dicho de otro modo, ambos errores se han incrementado con éste método para un mismo Cr y Dt.

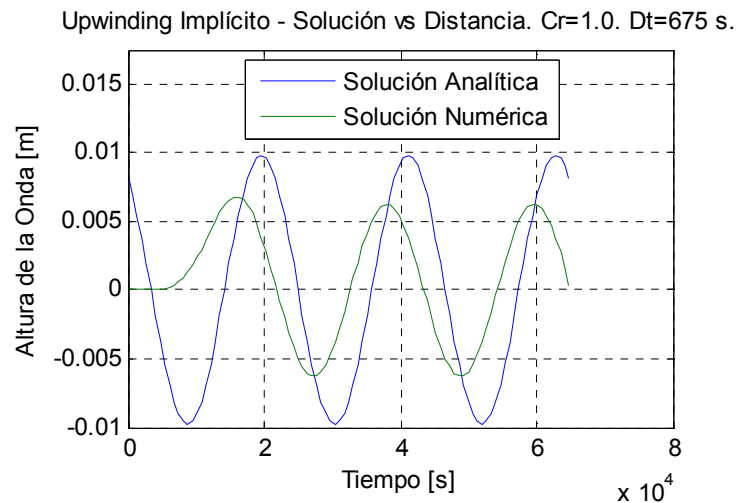


Figura 9. Solución con el paso del tiempo. Upwind Implícito O1. $x=120$ km aprox.

4.4 Análisis de errores

De igual manera que en el análisis del Esquema Upwind Explícito, adoptaremos el Error RMS para medir la desviación entre la solución analítica del modelo diferencial y su solución numérica mediante el Esquema Upwind Implícito de Primer Orden.

Tabla 6. Cálculo del error RMS de la solución por diferencias finitas para esquema Upwind Implícito.

Raíz de la Desviación Cuadrática Media [m]				
	Delta t [s]			
Courant	337.5	675	1350	2700
0.2	0.0066	0.0097	0.0094	0.0102
0.4	0.0046	0.0075	0.0107	0.0101
0.6	0.0038	0.0064	0.0098	0.0130
0.8	0.0033	0.0058	0.0092	0.0127
1.0	0.0030	0.0053	0.0085	0.0123
1.2	0.0028	0.0050	0.0082	0.0123
1.6	0.0026	0.0046	0.0078	0.0120
2.0	0.0024	0.0044	0.0074	0.0115
3.0	0.0022	0.0041	0.0070	0.0111

Los datos suministrados por la Tabla 6 y la Figura 10 apoyan la tendencia ilustrada por las gráficas de la Tabla 5, donde el error tiende a disminuir con el decremento de Δt y con el incremento de Cr .

No se concluyen más ideas acerca del comportamiento del error, con la excepción de que éste posee un comportamiento que podría aproximarse a una línea recta para los valores más altos de Cr . Esto apoyaría en un principio el orden del error que posee el esquema de cálculo en t , $O(\Delta t)$.

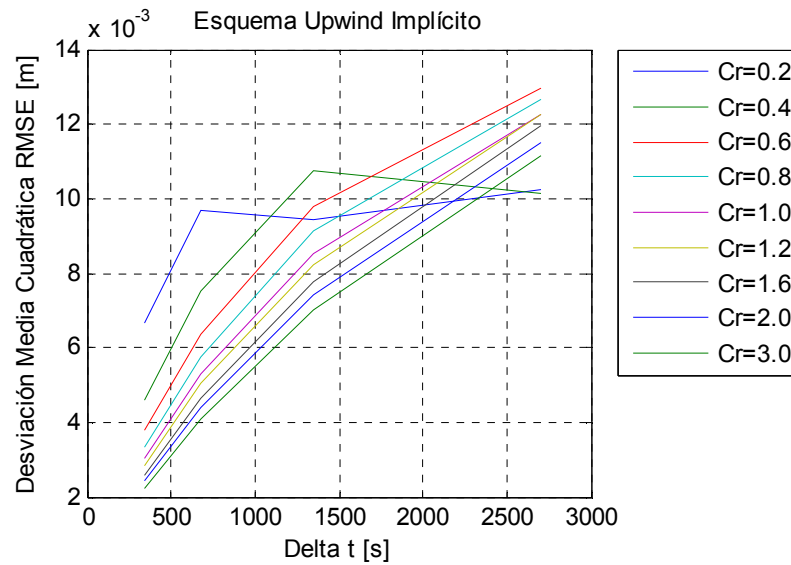


Figura 10. Gráfica del error RMS para Esquema Upwind Explícito de orden 1.

4.5 Solución Numérica

En la Figura 11 es posible apreciar un gráfico de la solución numérica en comparación con la solución analítica. Este gráfico corresponde a la solución seleccionada como la mejor aproximación posible utilizando el esquema Upwind Implícito de Primer Orden. Esta decisión se apoya en los resultados de la Figura 10, los cuales indican que el error disminuye con el incremento del Courant y con el decremento del Delta t. El error RMS calculado para esta solución es de 1.6462×10^{-4} metros, habiéndose calculado con un $Cr=5$ y un $\Delta t=25$ s. La precisión de la solución numérica estuvo influenciada en gran medida por la limitación del equipo utilizado para computar los cálculos.

Tabla 7. Parámetros de Simulación para solución por Upwind Implícito O1.

Variable	Valor
Courant	5.0
Delta t	25 segundos
Tiempo de solución	60 horas
Coef. Manning	0.01
Pend. Canal	2.0×10^{-5} m/m
Error RMS	1.6462×10^{-4} m

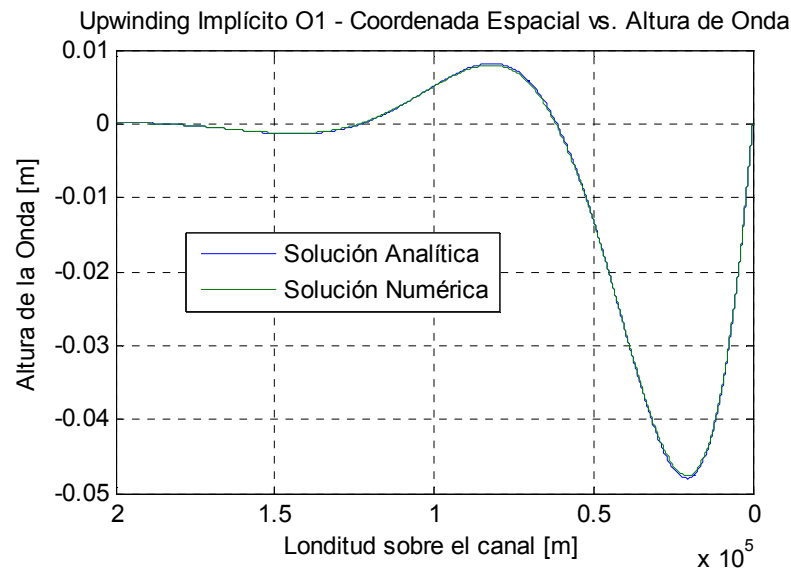


Figura 11. Solución Numérica óptima – Esquema Upwind Implícito.

4.6 Ensayos de Sensibilidad

La Figura 12 nos muestra la solución a un tiempo de 60 horas, con un $Cr=5$ y un $\Delta t=42.1875$ segundos. El Δt seleccionado es un múltiplo exacto del periodo, con el fin de obtener la solución exactamente en el punto donde el valor de la función forzante es igual a cero.

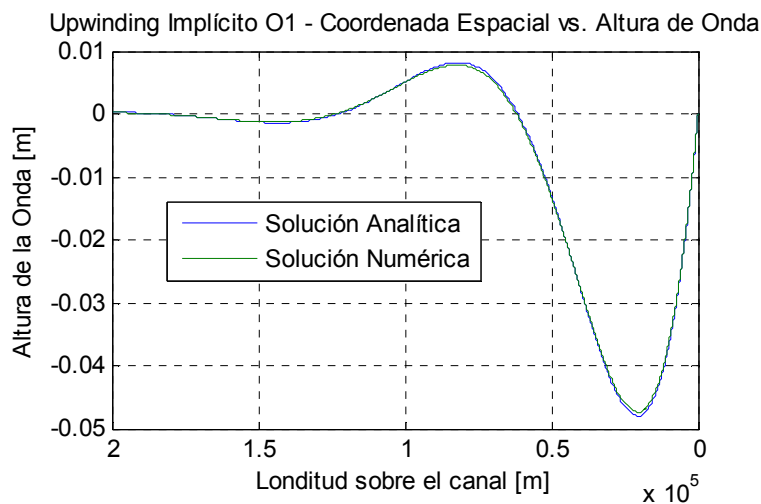


Figura 12. Solucion mediante Upwind Explícito O1. $Cr=5$. $\Delta t=42.1875$ s.

A continuación se observará el comportamiento de la solución con la variación del Coeficiente de Rugosidad de Manning y la Pendiente del Canal. El anterior resultado será tomado como referencia. De su solución solo variaremos los dos parámetros mencionados para observar el comportamiento de la solución numérica.

4.6.1 Variando el Coeficiente de Manning

Tabla 8. Parámetros de cálculo para ensayos con el Coeficiente de Rugosidad.

Variable	Valor
Courant	5.0
Delta t	42.1875 segundos
Tiempo de solución	60 horas
Coef. Manning	<i>Variable</i>
Pend. Canal	$2.0e-5$

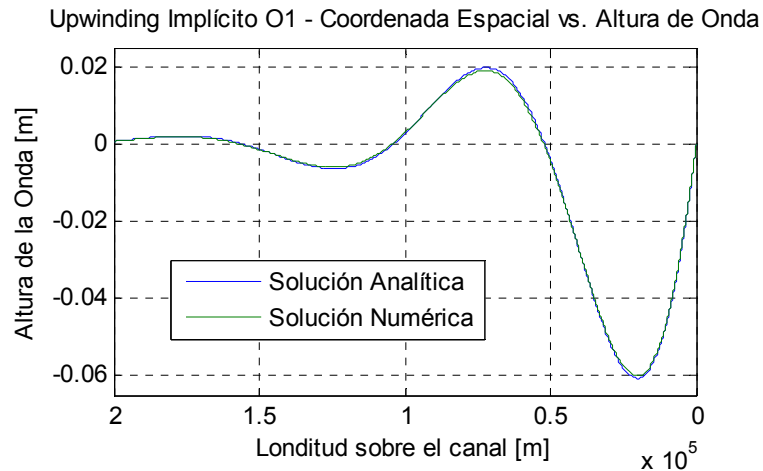


Figura 13. Ensayo Upwind Explícito O1. Manning=0.006.

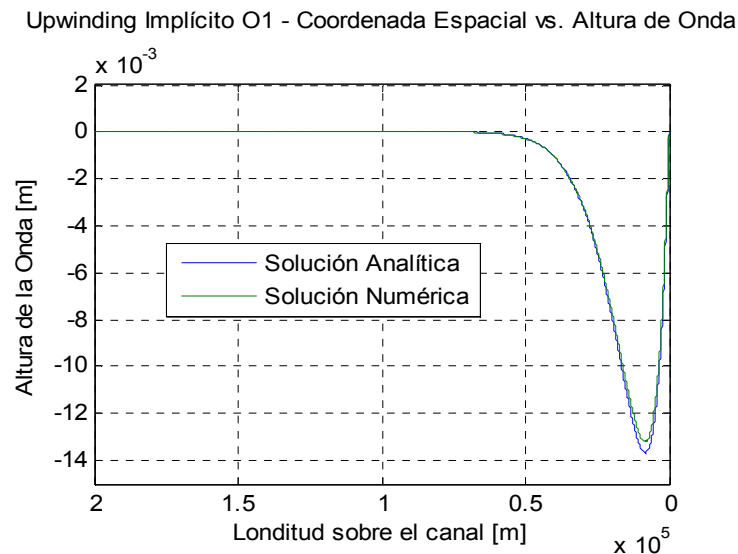


Figura 14. Ensayo Upwind Explícito O1. Manning=0.05.

Al igual que para el esquema Upwind Explícito, al observar la Figura 13 notamos una conservación de la energía impuesta por el forzante, lo cual es físicamente congruente con la disminución del Coeficiente de Rugosidad. A menor Rugosidad, menores son las

pérdidas por fricción con la superficie y mayor es la conservación de la energía con la longitud del canal.

Observando la Figura 14, concluimos todo lo contrario. Desde el punto de vista físico, el incremento de la Rugosidad origina un proceso de disipación de energía desde la onda en el fluido hacia las paredes del canal. Este proceso es irreversible, lo cual se manifiesta en una atenuación completa de la onda con la longitud del canal. El esquema implícito posee la ventaja de la estabilidad incondicional, lo cual se hace evidente, en comparación con el esquema explícito. Ver Figura 8.

4.6.2 Variando la Pendiente del Canal

Tabla 9. Parámetros de cálculo para ensayos con la pendiente del canal.

Variable	Valor
Courant	5.0
Delta t	42.1875 segundos
Tiempo de solución	60 horas
Coef. Manning	0.01
Pend. Canal	<i>Variable</i>

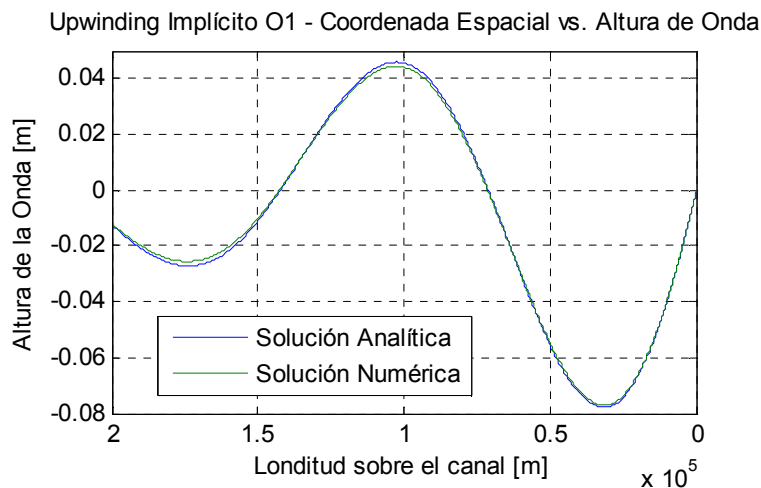


Figura 15. Ensayo Upwind Implícito O1. Pendiente= $2.0e-6$.

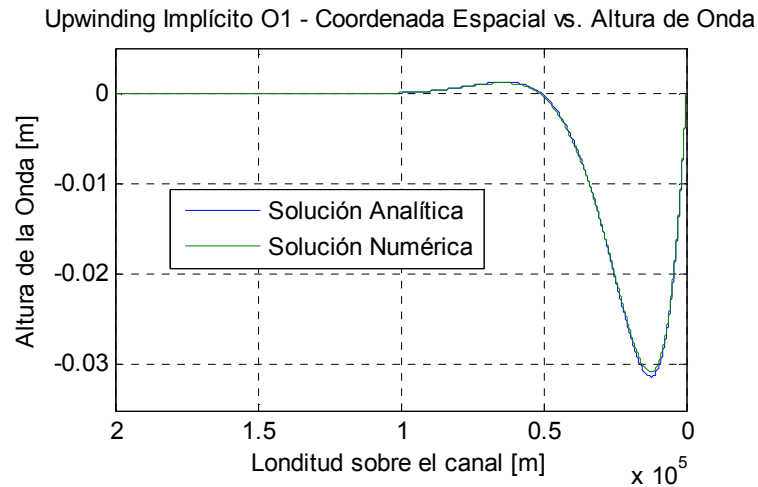


Figura 16. Ensayo Upwind Implícito O1. Pendiente= $6.0e-5$.

La conclusión de la variación de la Pendiente del Canal sobre la solución numérica es análoga a la producida por la variación de la rugosidad. Para números de Pendiente menores a $2.0e-5$ la energía del forzante se conserva con el incremento de la distancia, ver Figura 15. Para números mayores a $2.0e-5$ la onda se atenúa, ver Figura 16, sin embargo, en comparación con el mismo resultado para el esquema Upwind Explícito, la solución no se hace inestable.

5. ESQUEMA LAX-WENDROFF EXPLÍCITO DE SEGUNDO ORDEN

5.1 Discretización del modelo diferencial

La ecuación diferencial discretizada mediante el método de diferencias finitas, empleando el esquema de cálculo Lax-Wendroff se deriva a partir de la expansión en series de Taylor de la variable dependiente, como sigue:

$$\eta(x, t + \Delta t) = \eta(x, t) + \frac{\partial \eta}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \frac{(\Delta t)^2}{2!} + O(\Delta t)^3$$

En términos de los índices,

$$\eta_i^{n+1} = \eta_i^n + \frac{\partial \eta}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \frac{(\Delta t)^2}{2!} + O(\Delta t)^3$$

Ecuación 5

Si consideramos la ecuación del modelo diferencial,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -c_g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \psi \eta$$

Ecuación 6

Derivando la ecuación con respecto al tiempo se obtiene,

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = c_g^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + 2\psi c_g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \psi^2 \eta$$

Ecuación 7

Sustituyendo la Ecuación 6 y Ecuación 7 en la Ecuación 5, se obtiene,

$$\begin{aligned} \eta_i^{n+1} = & \left(1 - \psi \Delta t + \frac{1}{2} \psi^2 \Delta t^2\right) \eta_i^n - \frac{1}{2} c_g \frac{\Delta t}{\Delta x} (1 - \psi \Delta t) (\eta_{i+1}^n - \eta_{i-1}^n) \\ & + \frac{1}{2} \left(c_g \frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 (\eta_{i+1}^n - 2\eta_i^n + \eta_{i-1}^n) \end{aligned}$$

Ecuación 8

Definiendo el número de Courant,

$$c = c_g \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

La Ecuación 8 resulta,

$$\begin{aligned} \eta_i^{n+1} = & \left(1 - \psi \Delta t + \frac{1}{2} \psi^2 \Delta t^2\right) \eta_i^n - \frac{1}{2} c (1 - \psi \Delta t) (\eta_{i+1}^n - \eta_{i-1}^n) \\ & + \frac{1}{2} c^2 (\eta_{i+1}^n - 2\eta_i^n + \eta_{i-1}^n) \end{aligned}$$

Ecuación 9

5.1.1 Discretización de las condiciones iniciales y de borde

Las condiciones iniciales y de borde han sido discretizadas tal y como se observa en el numeral 3.1.1.

5.2 Análisis de consistencia

El método Lax-Wendroff de orden 2 aplicado al problema de escurrimiento unidimensional será Consistente si cuando $\Delta t \rightarrow 0$ y $\Delta x \rightarrow 0$ mi error de truncamiento tiende a cero. El desarrollo matemático es como sigue:

Tomando como punto de partida la Ecuación 8, desarrollamos en series de Taylor los siguientes términos:

$$\begin{aligned}\eta_i^{n+1} &= \eta_i^n + \Delta t \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial t^3} + O(\Delta t)^4 \\ \eta_{i+1}^n &= \eta_i^n + \Delta x \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} + O(\Delta x)^4 \\ \eta_{i-1}^n &= \eta_i^n - \Delta x \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} + O(\Delta x)^4\end{aligned}$$

Reemplazando el desarrollo de los tres términos anteriores en la Ecuación 8, cancelando términos y reagrupando obtenemos la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \psi \eta \\ = -\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\Delta t^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial t^3} + \frac{1}{2} \psi^2 \Delta t \eta + c_g \Delta t \psi \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{6} c_g \Delta t \psi \Delta x^2 \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \\ - \frac{1}{6} c_g \Delta x^2 \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} + \frac{1}{2} c_g^2 \Delta t \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + O(\Delta x^2 + \Delta t^3)\end{aligned}$$

Ecuación 10

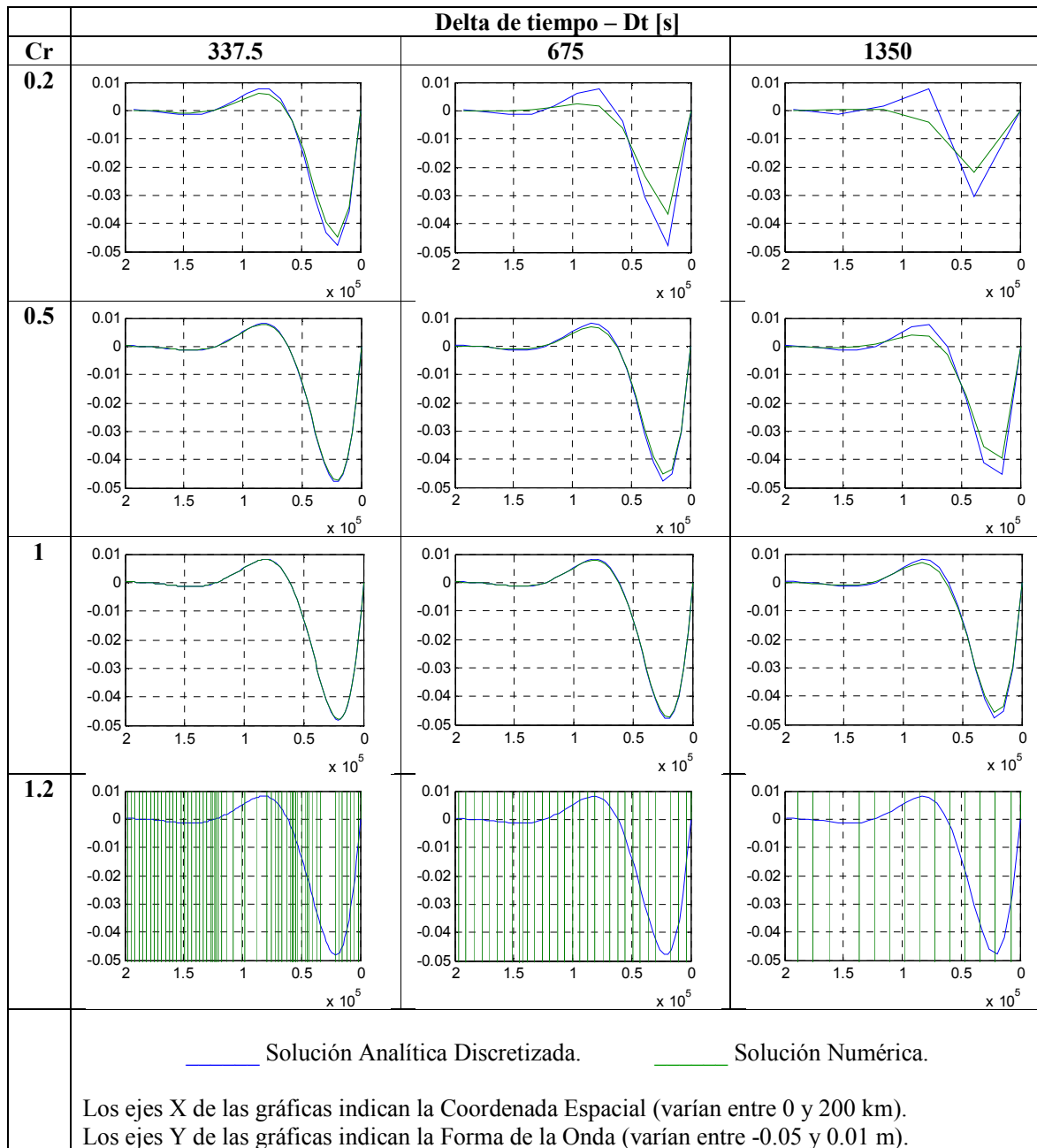
De la Ecuación 10 podemos concluir que cuando $\Delta t \rightarrow 0$ y $\Delta x \rightarrow 0$ el miembro derecho tiende a cero. Este miembro representa el error de truncamiento, de donde concluimos que la reducción de los pasos temporales y espaciales tienden a llevarme a resolver en forma exacta el modelo diferencial de nuestro problema.

5.3 Ensayos numéricos

En la Tabla 10 se pueden apreciar los resultados de algunos ensayos numéricos de la solución variando el número de Courant y el paso temporal Delta t. Para números de Courant menores que 1 la exactitud de la solución disminuye, mientras que para $Cr > 1$ la solución se inestabiliza y en consecuencia diverge por completo. También se pueden sacar conclusiones a partir de la variación en el paso temporal. Para pasos que tienden al

incremento la exactitud de la aproximación por diferencias finitas decrece, mientras que para pasos que tienden a cero la aproximación mejora notablemente.

Tabla 10. Gráficas Solución Analítica vs. Solución Numérica para un tiempo de 60 horas (6 periodos).



En la Figura 17 podemos observar cómo el esquema Lax-Wendroff incrementa la precisión de la solución numérica, conservando el mismo número de Courant y Dt. Podemos entonces comparar los tres métodos utilizados desde este punto de vista, apreciando las soluciones ilustradas en la Figura 1 y la Figura 9.

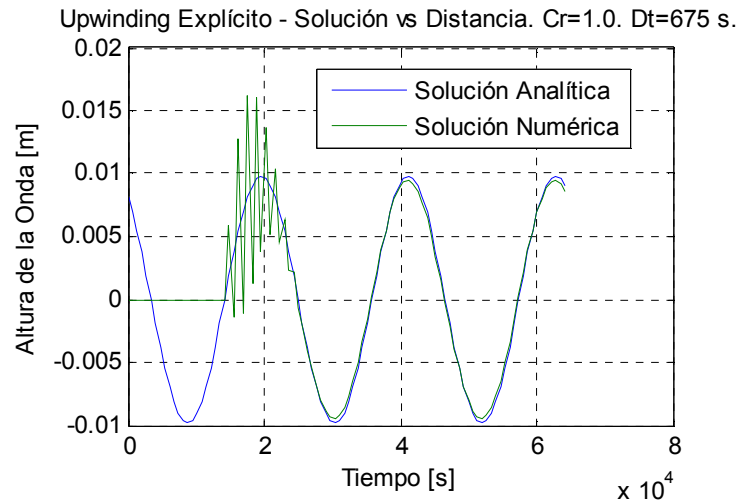


Figura 17. Solución con el paso del tiempo. Lax-Wendroff O2. $x=120$ km aprox.

5.4 Análisis de errores

Tabla 11. Cálculo del error RMS de la solución por diferencias finitas para esquema Lax-Wendroff.

Raíz de la Desviación Cuadrática Media [m]				
	Delta t [s]			
Courant	337.5	675	1350	2700
0.2	0.0015	0.0045	0.0052	0.0112
0.5	2.5256e-4	9.1402e-4	0.0027	0.0050
1.0	7.2194e-5	2.6750e-4	8.9371e-4	5.8525e+3

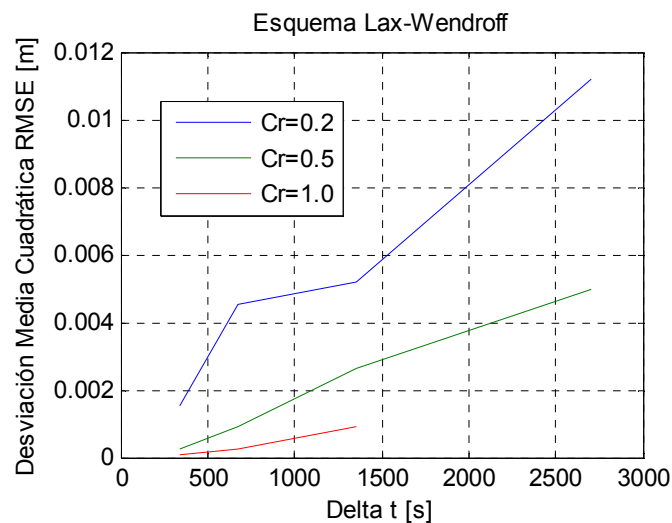


Figura 18. Gráfica del error RMS para Esquema Lax-Wendroff de orden 2.

El orden de error del esquema es proporcional a Δx^2 y Δt^2 . Se requiere un análisis más profundo de este comportamiento para poder sacar conclusiones al respecto, debido a

que la tendencia de la gráfica podría indicarnos una tendencia parabólica con $Cr=5$ y $Cr=1$, mas no a partir de $Cr=0.2$.

5.5 Solución Numérica

La solución numérica más exacta que se determinó gracias al esquema de Lax-Wendroff se expone en la Figura 19. Naturalmente, la solución numérica se encuentra superpuesta a la solución analítica, debido a que el orden de la aproximación es bastante bueno con respecto a los resultados de los esquemas Upwind Explícito e Implícito. Nótese el número del error RMS en la Tabla 12, el cual resulta el más pequeño alcanzado a esta altura del trabajo.

Tabla 12. Parámetros de Simulación para solución por Lax-Wendroff.

Variable	Valor
Courant	1.0
Delta t	21.09375 s
Tiempo de solución	60 horas
Coef. Manning	0.01
Pend. Canal	2.0e-5 m/m
Error RMS	2.9893e-7 m

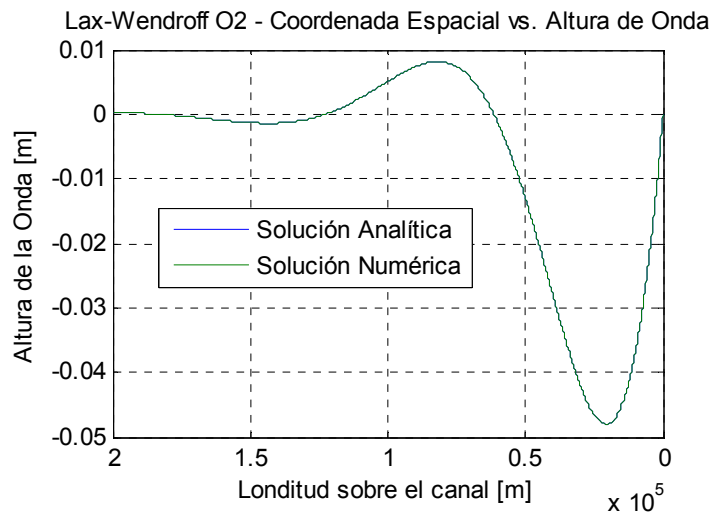


Figura 19. Solución Numérica Óptima – Esquema Lax-Wendroff.

5.6 Ensayos de Sensibilidad

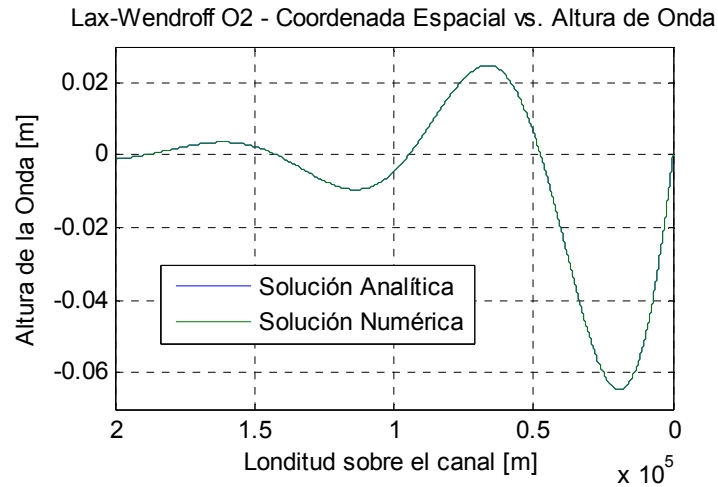
Las variaciones en la solución serán comparadas con la solución observada en la Figura 19.

5.6.1 Variando el Coeficiente de Manning

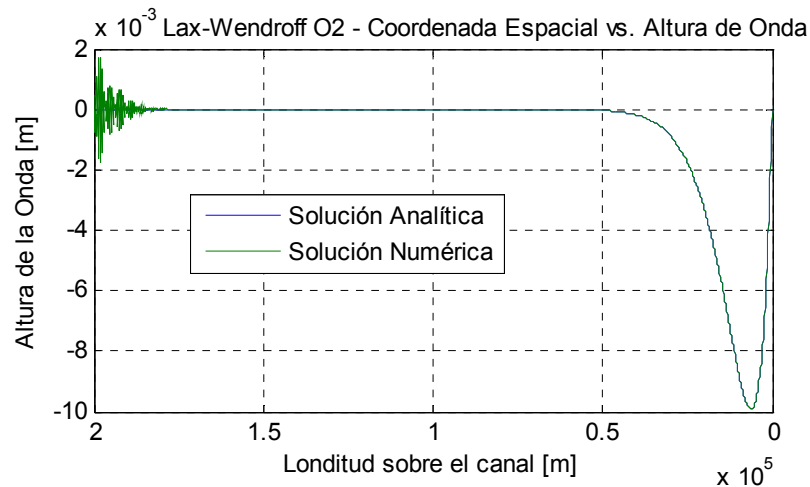
El esquema Lax-Wendroff es estable ante variaciones pequeñas en el Coeficiente de Rugosidad.

Tabla 13. Parámetros de cálculo para ensayos con el Coeficiente de Rugosidad.

Variable	Valor
Courant	1.0
Delta t	21.09375 s
Tiempo de solución	60 horas
Coef. Manning	Variable
Pend. Canal	2.0e-5 m/m

**Figura 20.** Ensayo Lax-Wendroff O2. Manning 0.005.

Para variaciones en la Rugosidad de la superficie del canal obtenemos una manifestación de inestabilidad a partir de un coeficiente aproximado de 0.07 hacia el incremento. Podemos observar esta tendencia en la Figura 21.

**Figura 21.** Ensayo Lax-Wendroff O2. Manning=0.07.

5.6.2 Variando la Pendiente del Canal

Tabla 14. Parámetros de cálculo para ensayos con la pendiente del canal.

Variable	Valor
Courant	1.0
Delta t	21.09375 s
Tiempo de solución	60 horas
Coef. Manning	0.01
Pend. Canal	<i>Variable</i>

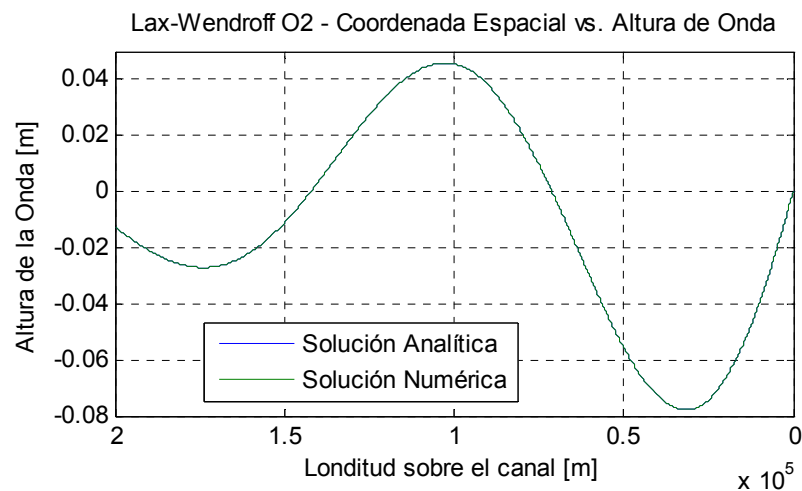


Figura 22. Ensayo Lax-Wendroff O2. Pendiente= 2.0×10^{-6} m/m.

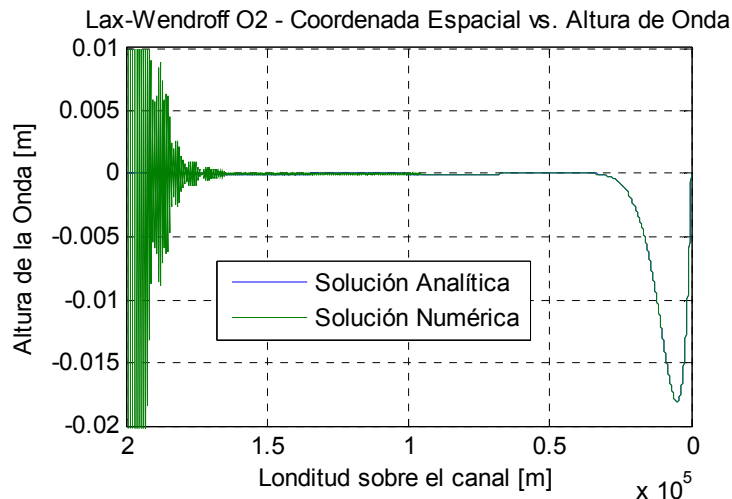


Figura 23. Ensayo Lax-Wendroff O2. Pendiente= 1.75×10^{-4} m/m.

El comportamiento observado para la disminución de la pendiente es la conservación de la energía impuesta por la función forzante, y es análogo al observado para la solución con los esquemas Upwind Explícito e Implícito, ver Figura 22. En relación con el

incremento de la pendiente observamos inestabilidad numérica, la cual se ha manifestado notoriamente para los esquemas explícitos, más no para el implícito.

CONCLUSIONES GENERALES Y OBSERVACIONES

- La solución numérica del problema mediante el esquema Upwind Explícito de Primer Orden otorga una solución con menor error que la solución mediante el esquema Implícito de Primer Orden. No es posible comparar estrictamente ambos esquemas de cálculo debido a que los Delta t y Courant utilizados son diferentes, sin embargo, ambos cálculos están fuertemente influenciados por el Delta t, más que por el número de Courant. Teniendo en cuenta esto, el cálculo con el esquema Upwind Implícito de Primer Orden arrojó un Error RMS de $1.6462e-4$ metros, mientras que el esquema Upwind Explícito un Error RMS de $4.2219e-5$ metros, el cual es un orden de magnitud menor que el error del esquema implícito. Con esto concluimos que para este problema en particular, hemos logrado una mejor aproximación con el esquema Explícito.
- En forma comparativa, los esquema explícitos otorgaron mejores resultados que el esquema implícito, el cual se caracteriza por una estabilidad incondicional, sin embargo, dichos esquemas explícitos son más sensibles a variaciones como las impuestas al modificar los números de Manning y la Pendiente.

Mejoras para este trabajo

- Realizar un estudio de estabilidad en forma matemática aplicando los métodos de Von Neumann y de Perturbaciones Discretas.
- Profundizar en el análisis del orden numérico del error.

ANEXOS

SOLUCIÓN ANALÍTICA DEL PROBLEMA

La función siguiente corresponde a la solución analítica del problema planteado.

$$\eta(x, t) = a_0 \exp\left(-\frac{\Psi \xi}{|c_g|}\right) \sin\left[\frac{2\pi}{t_0}\left(t - \frac{\xi}{|c_g|}\right)\right]$$

El significado de cada variable y sus valores se encuentran especificados en el enunciado del Trabajo Práctico 1.

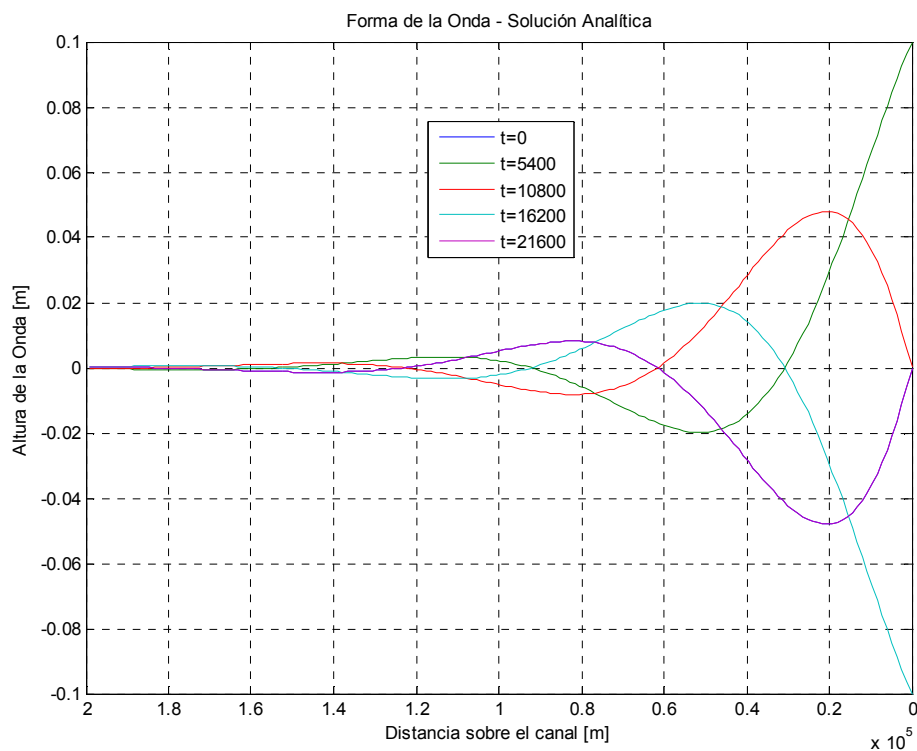


Figura 24. Solución Analítica para un periodo de la función forzante.

En la Figura 24 se observan las soluciones analíticas para diferentes instantes de tiempo. Las 5 curvas han sido generadas para un periodo completo de la función forzante y corresponden a los instantes de tiempo para $x=200$ km en los cuales la función forzante posee un valor máximo, uno mínimo y tres puntos en los cuales su valor es cero. La línea azul de la Figura 24 representa el valor de la solución para $t=0$, sin embargo esta solución corresponde exactamente con la solución a $t=21600$ segundos o 6 horas, justo el tiempo en el cual la función forzante ha cumplido un periodo completo.

CONSTANTES HIDRÁULICAS DEL PROBLEMA

Las siguientes son las variables cuyas fórmulas fueron otorgadas por el enunciado del problema. Una vez calculadas fueron asumidas como constantes a lo largo de los ensayos numéricos.

Variable	Valor
Velocidad base [m/s]	1.3077
Número de Froude base [-]	0.1867
Parámetro de Frecuencia [1/s]	1.5004e-04
Factor de atenuación [1/s]	1.6405e-04
Celeridad de la onda de gravedad [m/s]	-5.6959

ALGORITMO DE CÁLCULO COMPUTACIONAL

El programa utilizado para el desarrollo del algoritmo de programación para el cálculo de la solución es Matlab ® en su versión 2008a.

A continuación se incluye solo el programa desarrollado para el cálculo de las tres matrices de soluciones.

- **Algoritmo para esquemas Upwind Explícito e Implícito**

```

%%ALGORITMO PARA ESQUEMAS UPWIND EXPLÍCITO E IMPLÍCITO

clear all
clc

%CONSTANTES SUMINISTRADAS.

a0=0.1;           %Amplitud de la onda - m.
g=9.81;          %Aceleración de la gravedad - m/s^2.
t0=6*60*60;      %Periodo de la onda de marea forzante - seg.
r0=5;            %Radio hidráulico - m.
manning=0.01;     %Coef. de rugosidad de Manning - Adimensional.
s0=2*10^-5;      %Pendiente del canal - m/m.
h0=5;            %Altura media inicial - m.

%FORMULAS HIDRAULICAS DADAS.

u0=(1/manning)*(r0^(1/6))*(sqrt(r0*s0)); %Veloc. media del flujo -
m/s.
fr0=u0/sqrt(g*h0); %Núm .de Froude base - Adim.
lambda=(g*s0)/u0; %Parámetro de frecuencia -
1/s.
psi=lambda*(1+(fr0/2)); %Factor de atenuación - 1/s.
cg=u0-sqrt(g*h0); %Celeridad de la onda - m/s.

```

```

esquema=2; %1 Upw. Exp.      2 Upw. Imp.
c=1; %Número de Courant.
deltat=675; %Delta de x.
deltax=abs(cg)*(deltat/c); %Delta de t.
xfinal=200000; %Longitud del canal - m.
tfinal=21600*3; %Tiempo de cálculo - s.
filas=floor(xfinal/deltax)+1; %Filas de la matriz de la solución.
columnas=floor(tfinal/deltat); %Column. de la matriz de la solución.
etaupw=zeros(filas,columnas); %Matriz de la solución.

if esquema==1

    %ESQUEMA WPWIND EXPLICITO - 01.

    %LAZOS DE LLENADO DE LA MATRIZ SOLUCIÓN

    %El avance sobre las columnas corresponde al avance temporal.
    %El avance sobre las filas corresponde al avance espacial.

    for n=1:columnas
        etaupw(1,n+1)=a0*sin(2*pi*n*deltat/t0);

        for i=2:filas
            etaupw(i,n+1)=etaupw(i,n)+c*(etaupw(i-1,n)-...
                etaupw(i,n))-psi*deltat*etaupw(i,n);
        end
    end

end

if esquema==2

    %ESQUEMA UPWIND IMPLÍCITO - 01.

    %El avance sobre las columnas corresponde al avance temporal.
    %El avance sobre las filas corresponde al avance espacial.

    %Definimos las siguientes variables.

    a=1/(1-psi*deltat);
    c=abs(cg)*deltat/deltax;

    for n=1:columnas
        etaupw(1,n+1)=a0*sin(2*pi*n*deltat/t0);

        for i=2:filas
            etaupw(i,n+1)=(1/(a*(1+c)))*etaupw(i,n)+...
                (c/(1+c))*etaupw(i-1,n+1);
        end
    end

end

%MATRIZ DE SOLUCIÓN ANALÍTICA
[vt,vx]=meshgrid(0:deltat:tfinal,0:deltax:xfinal);
[tana,xana]=meshgrid(0:deltat:tfinal,0:deltax:xfinal);

```

```

eta=a0*exp((-psi*xana)/abs(cg)).*sin((2*pi)/t0)*(tana-...
(xana/abs(cg)));

%RAIZ DEL ERROR CUADRATICO MEDIO

suma=0;
i=0;

for i=1:filas;
    suma=suma+(eta(i,columnas)-etaupw(i,columnas))^2;
end

rmse=sqrt(suma/filas);

```

- **Algoritmo para esquema Lax-Wendroff**

```

%% ALGORITMO ESQUEMA LAX-WENDROFF

clear all
clc

%CONSTANTES SUMINISTRADAS.

a0=0.1;           %Amplitud de la onda - m.
g=9.81;          %Aceleración de la gravedad - m/s^2.
t0=6*60*60;     %Periodo de la onda de marea forzante - seg.
r0=5;           %Radio hidráulico - m.
manning=0.01;   %Coef. de rugosidad de Manning - Adimensional.
s0=2*10^-5;    %Pendiente del canal - m/m.
h0=5;           %Altura media inicial - m.

%FORMULAS HIDRAULICAS DADAS.

u0=(1/manning)*(r0^(1/6))*(sqrt(r0*s0)); %Veloc. media del flujo -
m/s.
fr0=u0/sqrt(g*h0); %Núm .de Froude base - Adim.
lambda=(g*s0)/u0; %Parámetro de frecuencia -
1/s.
psi=lambda*(1+(fr0/2)); %Factor de atenuación - 1/s.
cg=u0-sqrt(g*h0); %Celeridad de la onda - m/s.

c=1; %Número de Courant.
deltat=675; %Delta de x.
deltax=abs(cg)*(deltat/c); %Delta de t.
xfinal=200000; %Longitud del canal - m.
tfinal=21600*3; %Tiempo de cálculo - s.
filas=floor(xfinal/deltax)+1; %Filas de la matriz de la solución.
columnas=floor(tfinal/deltat); %Column. de la matriz de la solución.
etalax=zeros(filas,columnas); %Matriz de la solución.

%LAZOS DE LLENADO DE LA MATRIZ SOLUCIÓN

%El avance sobre las columnas corresponde al avance temporal.
%El avance sobre las filas corresponde al avance espacial.

for n=1:columnas
    etalax(1,n+1)=a0*sin(2*pi*n*deltat/t0);

```

```

for i=2:filas
    if (i==filas)
        etalax(i,n+1)=(1-psi*deltat+((1/2)*...
            (psi^2)*(deltat^2))*etalax(i,n)-...
            (1/2)*c*(1-psi*deltat)*(etalax(i,n)-...
            etalax(i-1,n)))+(1/2)*(c^2)*...
            (etalax(i,n)-2*etalax(i,n)+...
            etalax(i-1,n)));
    else
        etalax(i,n+1)=(1-psi*deltat+(1/2)*(psi^2)*...
            (deltat^2))*etalax(i,n)-(1/2)*c*(1-psi*...
            deltat)*(etalax(i+1,n)-etalax(i-1,n))+...
            (1/2)*(c^2)*(etalax(i+1,n)-...
            2*etalax(i,n)+etalax(i-1,n)));
    end
end
end

%MATRIZ DE SOLUCIÓN ANALÍTICA
[vt,vx]=meshgrid(0:deltat:tfinal,0:deltax:xfinal);
[tana,xana]=meshgrid(0:deltat:tfinal,0:deltax:xfinal);
eta=a0*exp((-psi*xana)/abs(cg)).*sin(((2*pi)/t0)*(tana-...
    (xana/abs(cg))));

%MATRIZ DE LA RAIZ DEL ERROR CUADRATICO MEDIO

suma=0;
i=0;

for i=1:filas;
    suma=suma+(eta(i,columnas)-etalax(i,columnas))^2;
end

rmse=sqrt(suma/filas);

```