Trabajo Práctico # 1
Serie de Ejercicios 1 – Formulaciones Débiles

FREDY ANDRÉS MERCADO NAVARRO
Identificación: Pasaporte 98´773.532.
Maestría en Simulación Numérica y Control
Cuatrimestre: II/2011
Fecha: 17 de octubre.

Universidad de Buenos Aires
Ciudad Autónoma de Buenos Aires
Argentina
2011

PROBLEMA 1

Se tiene una viga simplemente apoyada, cuya ecuación diferencial y condiciones de borde en 1D son:

$$EI\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{qx(L-x)}{2} = 0$$

$$u(x=0) = u(x=L) = 0$$

Las dos condiciones anteriores comunican que la deflexión de la viga en ambos puntos de apoyo es cero. Dado que la carga q se encuentra uniformemente distribuida sobre toda la longitud L, se espera que la deflexión sea máxima en x=L/2, dada la simetría que posee la carga distribuida con respecto al centro de la viga.

La función de prueba de desplazamiento es aquella función que utilizaremos para que se aproxime a la solución analítica de la ecuación diferencial. La primera condición que se debe cumplir para que esta función sea útil es satisfacer las dos condiciones de borde de nuestro problema. Para x=0, la deflexión es u=0, y para x=L, la deflexión es u=0. Dicha función de prueba es:

$$u(x) = A.sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

Durante el desarrollo del trabajo se calculará la deflexión en x=L/2 evaluando en cada solución otorgada por los diferentes métodos. Estas soluciones serán comparadas con el valor de la solución en este punto, la cual es:

$$u\left(x=\frac{L}{2}\right) = \frac{5qL^4}{384EI}$$

Con el objeto de comparar resultados más adelante, se incluirá la solución analítica de la ecuación diferencial para todo valor 0≤x≤L.

$$u(x) = \frac{qLx^3}{12EI} - \frac{qx^4}{24EI} - \frac{qL^3x}{24EI}$$

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN APROXIMADA

Los métodos a emplear son el método de Rayleigh-Ritz (Minimizando el funcional) y varios métodos de residuos ponderados, los cuales operan tratando de minimizar el valor del residuo.

a) Minimizando el funcional

El funcional del problema ha sido suministrado dentro del problema. Derivamos la función de prueba y la reemplazamos en la ecuación del funcional, junto con el valor de la función u. Más adelante derivamos con respecto al valor A para encontrar el valor de ésta variable para el cual el funcional es mínimo.

$$\Phi = \int_0^L \left[\frac{EI}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{qx(L-x)}{2}u\right]dx$$

Reemplazamos en la expresión del funcional los valores derivados de la función de prueba:

$$\frac{du}{dx} = A.cos\left(\frac{\pi x}{L}\right).\frac{\pi}{L}$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 = \frac{\pi^2 A^2}{L^2}.cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$\Phi = \int_0^L \left[\frac{EI}{2}\left(\frac{\pi^2 A^2}{L^2}.cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right) + \frac{qx(L-x)}{2}\left(A.sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right)\right]dx$$

A continuación expandimos en tres integrales y sacamos de ellas las variables que no dependen de x:

$$\Phi = \frac{EI}{2}\frac{\pi^2 A^2}{L^2}\int_0^L cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx + \frac{AqL}{2}\int_0^L x.sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx - \frac{Aq}{2}\int_0^L x^2.sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx$$

Empleamos sustituciones para llevar las integrales a expresiones normalizadas.

$$v = \frac{\pi x}{L}, dv = \frac{\pi}{L}dx, dx = \frac{L}{\pi}dv$$

- Integral 1

$$\int_0^L cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx = \int_{x=0}^{x=L} cos^2(u)\frac{L}{\pi}dv = \frac{L}{\pi}\int_{x=0}^{x=L} cos^2(u)dv = \frac{L}{\pi}\left[\frac{1}{2}v + \frac{1}{4}sen(2v)\right]_{x=0}^{x=L}$$

$$= \frac{L}{\pi}\left[\frac{1}{2}\frac{\pi x}{L} + \frac{1}{4}sen\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right]_0^L = \frac{L}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}(0)\right]$$

$$\int_0^L cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx = \frac{L}{2}$$

- Integral 2

$$\int_0^L x.sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx = \left(\frac{L}{\pi}\right)^2\int_{x=0}^{x=L} v.sen(v)dv = \left(\frac{L}{\pi}\right)^2[sen(v) - u.cos(v)]_{x=0}^{x=L}$$

$$= \left(\frac{L}{\pi}\right)^2\left[sen\left(\frac{\pi x}{L}\right) - \left(\frac{\pi x}{L}\right).cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right]_0^L = \left(\frac{L}{\pi}\right)^2[0-(\pi).cos(\pi)]$$

$$\int_0^L x.sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx = \frac{L^2}{\pi}$$

- Integral 3

$$\int_0^L x^2.sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx = \left(\frac{L}{\pi}\right)^3\int_{x=0}^{x=L} v^2.sen(v)dv = \left(\frac{L}{\pi}\right)^3[2v.sen(v) + (2-v^2).cos(v)]_{x=0}^{x=L}$$

$$= \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 \left[\frac{2\pi x}{L}.sen\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \left[2 - \left(\frac{\pi x}{L}\right)^2\right].cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right]_0^L$$

$$= \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 \{[\pi^2 - 2] - [0 + (2 - 0).\cos(0)]\}$$

$$= \int_0^L x^2.sen\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 (\pi^2 - 4)$$

Reemplazamos los valores de las tres integrales evaluadas en la ecuación del funcional, derivamos la expresión con respecto a la variable A, igualamos la pendiente a cero y despejamos el valor de A que minimiza el funcional:

$$\Phi = \frac{EI}{2}\frac{\pi^2 A^2}{L^2}\left(\frac{L}{2}\right) + \frac{AqL}{2}\left(\frac{L^2}{\pi}\right) - \frac{Aq}{2}\left[\left(\frac{L}{\pi}\right)^3 (\pi^2 - 4)\right]$$

$$\frac{d\Phi}{dA} = 0$$

$$\frac{d\Phi}{dA} = \frac{EI\pi^2}{2L}A + \frac{qL^3}{2\pi} - \frac{qL^3}{2\pi^3}(\pi^2 - 4) = 0$$

$$A = -\frac{4qL^4}{\pi^5 EI}$$

Habiendo determinado el valor de A, lo reemplazamos en nuestra función de prueba propuesta para encontrar la función que mejor se próxima a la solución analítica mediante este método:

$$u(x) = -\frac{4qL^4}{\pi^5 EI}.sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

Por último, calculamos el valor de la solución aproximada en el punto medio de la barra:

$$u(x = L/2) = -\frac{4qL^4}{\pi^5 EI}$$

b) **Por el Método de Colocación (en x=L/2)**

Este método se basa en el cálculo del residuo, expresión que resulta de la ecuación diferencial, y en la escogencia un punto sobre el dominio en el cual deseamos que el residuo sea igual a cero.

La siguiente expresión está basada en la notación utilizada por el autor K. J. Bathe en su texto Finite Element Procedures. La siguiente expresión es la ecuación diferencial del problema escrita con la convención utilizada por Bathe en su texto, donde tenemos el operador diferencial realizando una transformación sobre nuestra función de prueba e igualando este resultado al resto de la expresión, simbolizado por la letra r.

$$L_{2m}(\hat{\phi}) = r$$

$$L_{2m} = EI\frac{d^2}{dx^2}$$

La función de prueba posee la forma propuesta por la literatura, donde tenemos nuestra función de prueba multiplicada por un valor A. Se tendrán tantos valores de A como funciones de prueba, sin embargo, para el Problema 1, solo se calculará un solo valor de A por cada método.

$$\hat{\phi} = \hat{u} \rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i f_i \equiv \hat{u} = A.sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$r = \frac{qx(L-x)}{2}$$

El valor del residuo es igualado a cero:

$$R = r - L_{2m}(\hat{\phi}) = 0$$

Se transforma la función de prueba para ser evaluada de acuerdo al método:

$$r = L_{2m}(\hat{\phi}) = L_{2m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\right) = L_{2m}\left(A.sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right) = EI\frac{d^2}{dx^2}\left(A.sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right)$$

$$\frac{qx(L-x)}{2} = EI\frac{d}{dx}\left(A.cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\left(\frac{\pi}{L}\right)\right) = EI\left(A.-sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\right)$$

$$\frac{qx(L-x)}{2} = -EIA\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

Reemplazamos el valor x=L/2 denotando que deseamos que el residuo tenga un valor de cero en este punto específico.

$$\frac{qx\left[L-\left(\frac{L}{2}\right)\right]}{2} = -EIA\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 sen\left[\frac{\pi\left(\frac{L}{2}\right)}{L}\right]$$

$$\frac{q}{2}\left(\frac{L}{2}\right)^2 = -EIA\left(\frac{\pi}{L}\right)^2$$

Finalmente el valor de A es:

$$A = -\frac{qL^4}{8\pi^2 EI}$$

Entonces la función de prueba hallada mediante este método resulta:

$$u(x) = -\frac{qL^4}{8\pi^2 EI}.sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

Por último se calcula la deflexión con la solución hallada mediante este método:

$$u(x = L/2) = -\frac{qL^4}{8\pi^2 EI}$$

c) Usando el método de Subdominios

Mediante este método se divide el dominio en n intervalos y se integra la función del residuo, cuyo resultado se iguala a cero para minimizar el valor del área bajo la curva de la función residuo. A continuación minimizaremos dicha área para nuestra función de prueba dada sobre toda la longitud de la barra.

La siguiente integral es la forma general del método de Subdominios:

$$\int_D R(\hat{u})dD = 0$$

$$\int_0^L R(\hat{u})dx = 0$$

$$R(\hat{u}) = r - L_{2m}(\hat{u})$$

Nuestra función residuo es entonces:

$$R(\hat{u}) = \frac{qx(L-x)}{2} - EI\frac{d^2}{dx^2}\left(A.sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right)$$

$$\int_0^L \left[\frac{qx(L-x)}{2} - EI\frac{d^2}{dx^2}\left(A.sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right)\right]dx = 0$$

$$\int_0^L \left[\frac{qx(L-x)}{2} + EI\left(A.sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\right)\right]dx = 0$$

$$\frac{qL}{2}\int_0^L xdx - \frac{q}{2}\int_0^L x^2dx + EIA\int_0^L sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 dx$$

Realizamos una sustitución para la tercera integral de izquierda a derecha y llevarla a una forma general que pueda integrarse en forma directa. Definimos:

$$v = \frac{\pi x}{L}, dv = \frac{\pi}{L}dx$$

$$\frac{qL}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L - \frac{q}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^L - \left[-EIA\int_{x=0}^{x=L} sen(v)dv\left(\frac{\pi}{L}\right)\right] = 0$$

$$\frac{qL}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L - \frac{q}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^L - \left[EIA\left(\frac{\pi}{L}\right)[\cos(v)]_{x=0}^{x=L}\right] = 0$$

$$\frac{qL^3}{4}-\frac{qL^3}{6}-EIA\left(\frac{\pi}{L}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right]_0^L=\frac{qL^3}{4}-\frac{qL^3}{6}-EIA\left(\frac{\pi}{L}\right)[\cos(\pi)-\cos(0)]=0$$

$$\frac{qL^3}{4}-\frac{qL^3}{6}+\frac{2\pi EI}{L}A=0$$

$$\frac{qL^3}{12}+\frac{2\pi EI}{L}A=0$$

El resulta de los cálculos para el valor de A es:

$$A=-\frac{qL^4}{24\pi EI}$$

Asignamos el valor hallado de A a nuestra función de prueba:

$$\hat{u}(x)=-\frac{qL^4}{24\pi EI}.sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

Para fines comparativos, calculamos el valor de la deflexión de la viga en el punto medio:

$$\hat{u}(x=L/2)=-\frac{qL^4}{24\pi EI}$$

d) Método de Galerkin

Mediante este método integramos nuestro residuo sobre todo el dominio, el cual se encuentra multiplicado por una función de peso. Para el caso particular del Método de Galerkin, la función de peso es la misma función de forma. En esta función de peso, el valor de A no se tiene en cuenta. Solo poseemos una función de forma, de modo que el cálculo de A será realizado en forma explícita con un solo cálculo de la integral.

$$\int_D f_i R(\hat{u})dD=0 \quad i=1,2\dots n$$

$$f_i=sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

El valor del residuo continúa siendo el mismo que para los demás métodos de residuos ponderados:

$$R(\hat{u})=\frac{qx(L-x)}{2}-EIA.sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)\left(\frac{\pi}{L}\right)^2$$

Reemplazamos los desarrollos en la integral propuesta por el método:

$$\int_0^L sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)\left[\frac{qx(L-x)}{2}-EIA.sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\right]dx=0$$

Desarrollando la expresión resultante, obtenemos tres integrales. Al resolverlas, despejaremos el valor de A en forma explícita:

$$\frac{qL}{2}\int_0^L x.sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx-\frac{q}{2}\int_0^L x^2.sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx+EIA\left(\frac{\pi}{L}\right)\int_0^L sen^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)\left(\frac{\pi}{L}\right)dx=0$$

- Integral 1

$$\int_0^L x.sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx$$

Se emplea la integración por partes para resolver la integral. La forma general de la integración por partes para nuestro problema particular es como sigue:

$$\int_{x=0}^{x=L} v.dw=[v.w]_{x=0}^{x=L}-\int_{x=0}^{x=L} w.dv$$

Para aplicar la integración por partes definimos entonces las siguientes sustituciones:

$$v=x,dv=dx,dw=sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx$$

$$m=\frac{\pi x}{L},dm=\frac{\pi}{L}dx,dx=\frac{L}{\pi}dm$$

$$w=\int sen(m).\left(\frac{L}{\pi}\right)dm=\left(\frac{L}{\pi}\right)\int sen(m).dm=-\frac{L}{\pi}\cos(m)=-\frac{L}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

Sustituimos los valores definidos previamente:

$$\int_0^L x.sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx=\left\{x\left[-\frac{L}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right]\right\}_0^L-\int_0^L\left[-\frac{L}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right]dx$$

$$\int_0^L x.sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx=\left[-\frac{L}{\pi}x.\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right]_0^L+\frac{L}{\pi}\int_0^L\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx$$

Para resolver la integral del segundo término empleamos la sustitución:

$$s=\frac{\pi x}{L},ds=\frac{\pi}{L}dx,dx=\frac{L}{\pi}ds$$

Reemplazando tenemos:

$$\int_0^L cos\left(\frac{\pi x}{L}\right).dx=\frac{L}{\pi}\int_0^L cos(s).dw=\frac{L}{\pi}[sen(s)]_{x=0}^{x=L}$$

$$=\frac{L}{\pi}\left[sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right]_0^L=\frac{L}{\pi}[sen(\pi)-sen(0)]=\frac{L}{\pi}[0]$$

$$\int_0^L cos\left(\frac{\pi x}{L}\right).dx=0$$

Volviendo a la primera ecuación desarrollada por partes tenemos:

$$= \left[-\frac{L}{\pi}x.\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right]_0^L + \frac{L}{\pi}[0] = \left[-\frac{L^2}{\pi}cos(\pi) - (0)\right]$$

Finalmente, el valor de la Integral 1 es:

$$\int_0^L x.sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx = \frac{L^2}{\pi}$$

- Integral 2

$$\int_0^L x^2.sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx$$

Se emplea la integración por partes para resolver la integral. La forma general de la integración por partes para nuestro problema particular es idéntica a la forma propuesta para la Integral 1.

Para aplicar la integración por partes definimos entonces las siguientes sustituciones:

$$v = x^2, dv = 2xdx, dw = sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx$$

$$m = \frac{\pi x}{L}, dm = \frac{\pi}{L}dx, dx = \frac{L}{\pi}dm$$

$$w = \int sen(m).\left(\frac{L}{\pi}\right)dm = \left(\frac{L}{\pi}\right)\int sen(m).dm = -\frac{L}{\pi}\cos(m) = -\frac{L}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

Sustituimos los valores definidos previamente:

$$\int_0^L x^2.sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx = -\frac{L}{\pi}\left[x^2.cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right]_0^L + \frac{2L}{\pi}\int_0^L x.cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx$$

Para resolver la integral del segundo término de la expresión anterior se requiere emplear nuevamente la integración por partes. La forma general de la integración por partes es la misma tratada anteriormente. Se definen nuevamente algunas sustituciones:

$$v = x, dv = dx, dw = cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx$$

$$m = \frac{\pi x}{L}, dm = \frac{\pi}{L}dx, dx = \frac{L}{\pi}dm$$

$$w = \int cos(m).\left(\frac{L}{\pi}\right)dm = \left(\frac{L}{\pi}\right)\int cos(m).dm = \frac{L}{\pi}\text{sen}(m) = \frac{L}{\pi}\text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$\int_0^L x.cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx = \frac{L}{\pi}\left[x.sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right]_0^L - \frac{L}{\pi}\int_0^L sen\left(\frac{\pi x}{L}\right).dx$$

Para resolver la integral del segundo término empleamos la sustitución:

$$w = \frac{\pi x}{L}, dw = \frac{\pi}{L}dx, dx = \frac{L}{\pi}dw$$

Reemplazando tenemos:

$$\int_0^L sen\left(\frac{\pi x}{L}\right).dx = \frac{L}{\pi}\int_0^L sen(w).dw = \frac{L}{\pi}[-cos(w)]_{x=0}^{x=L}$$

$$= -\frac{L}{\pi}\left[cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right]_0^L = -\frac{L}{\pi}[cos(\pi) - cos(0)] = -\frac{L}{\pi}[-2]$$

$$\int_0^L sen\left(\frac{\pi x}{L}\right).dx = \frac{2L}{\pi}$$

Reemplazamos en la expresión resultante de la segunda integración por partes:

$$\int_0^L x.cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx = \frac{L}{\pi}\left[x.sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right]_0^L - \frac{L}{\pi}\left(\frac{2L}{\pi}\right) = \frac{L}{\pi}(0) - 2\left(\frac{L}{\pi}\right)^2$$

$$\int_0^L x.cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx = -2\left(\frac{L}{\pi}\right)^2$$

Reemplazamos en la expresión de la primera integración por partes:

$$\int_0^L x^2.sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx = -\frac{L}{\pi}\left[x^2.cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right]_0^L + \frac{2L}{\pi}\left[-2\left(\frac{L}{\pi}\right)^2\right] = -\frac{L}{\pi}[L^2(-1)] - 4\left(\frac{L}{\pi}\right)^3$$

$$\int_0^L x^2.sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx = \frac{L^3}{\pi} - 4\left(\frac{L}{\pi}\right)^3 = \frac{L^3}{\pi}\left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right)$$

$$\int_0^L x^2.sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx = \left(\frac{L}{\pi}\right)^3(\pi^2 - 4)$$

- Integral 3

$$\int_0^L sen^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)\left(\frac{\pi}{L}\right)dx$$

Se requiere definir las siguientes sustituciones:

$$w = \frac{\pi x}{L}, dw = \frac{\pi}{L}dx, dx = \frac{L}{\pi}dw$$

Reemplazamos las sustituciones anteriores:

$$\int_0^L sen^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)\left(\frac{\pi}{L}\right)dx = \int_0^L sen^2(w)dw = \int_{x=0}^{x=L}\left(\frac{1-\cos(2w)}{2}\right)dw$$

$$= \frac{1}{2}\int_{x=0}^{x=L}dw - \frac{1}{2}\int_{x=0}^{x=L}\cos(2w)dw = \frac{1}{2}[w]_{x=0}^{x=L} - \frac{1}{2}\int_{x=0}^{x=L}\cos(2w)dw$$

Resolvemos la integral del segundo término:

$$\int_{x=0}^{x=L} \cos{(2w)} dw$$

Empleamos las siguientes sustituciones:

$$f = 2w, df = 2dw, dw = \frac{df}{2}$$

$$\int_{x=0}^{x=L} \cos(2w)\, dw = \frac{1}{2}\int_{x=0}^{x=L} \cos(f)\, df = \frac{1}{2}[sen(f)]_{x=0}^{x=L} = \frac{1}{2}[sen(2w)]_{x=0}^{x=L}$$

$$= \frac{1}{2}\left[sen\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right]_0^L = \frac{1}{2}[sen(2\pi) - sen(0)] = \frac{1}{2}[0] = 0$$

Retornamos a la ecuación resultante de la primera integración por partes:

$$\int_0^L sen^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)\left(\frac{\pi}{L}\right) dx = \frac{1}{2}[w]_{x=0}^{x=L} = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi x}{L}\right]_0^L$$

$$\int_0^L sen^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)\left(\frac{\pi}{L}\right) dx = \frac{\pi}{2}$$

Tomamos los resultados de las Integrales 1, 2 y 3. Las reemplazamos en la siguiente ecuación y determinamos el valor de A:

$$\frac{qL}{2}\int_0^L x.sen\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx - \frac{q}{2}\int_0^L x^2.sen\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx + EIA\left(\frac{\pi}{L}\right)\int_0^L sen^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)\left(\frac{\pi}{L}\right) dx = 0$$

$$\frac{qL}{2}\left(\frac{L^2}{\pi}\right) - \frac{q}{2}\left[\left(\frac{L}{\pi}\right)^3(\pi^2 - 4)\right] + EIA\left(\frac{\pi}{L}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\frac{qL^3}{2\pi} - \frac{qL^3}{2\pi^3}(\pi^2 - 4) + EIA\frac{\pi^2}{2L} = 0$$

$$EIA\frac{\pi^2}{2L} = -\frac{4qL^3}{2\pi^3}$$

El valor resultante es:

$$A = -\frac{4qL^4}{\pi^5 EI}$$

Reemplazamos en la función de forma general para hallar la solución particular propuesta por este método:

$$\hat{u}(x) = -\frac{4qL^4}{\pi^5 EI}.sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

Con el fin de efectuar la comparación con la solución analítica, determinamos el valor de la solución aproximada en x=L/2.

$$\hat{u}(x = L/2) = -\frac{4qL^4}{\pi^5 EI}$$

e) Por el método de Mínimos Cuadrados

Basándonos en la literatura propuesta por K. J. Bathe, las formas generales para aplicar el método son:

$$\frac{\partial}{\partial a_i}\int_D R(\hat{u})^2 dD = \int_D R(\hat{u}) L_{2m}(f_i) dD = 0; i = 1,2, \dots n.$$

La expresión para el residuo permanece igual:

$$R(\hat{u}) = r - L_{2m}[\hat{u}]$$

Desarrollamos la expresión para el residuo y la función de peso para reemplazarlas en la expresión integral propuesta por el método:

$$R(\hat{u}) = \frac{qx(L-x)}{2} - EI\frac{d^2}{dx^2}\left[A.sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right]$$

$$L_{2m}(f_i) = EI\frac{d^2}{dx^2}\left(sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right) = -EI\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

La expresión general para determinar el valor de A es:

$$\int_D R(\hat{u}).L_{2m}(f_i) dD = 0$$

Reemplazando tenemos:

$$\int_0^L \left\{\frac{qx(L-x)}{2} - EI\frac{d^2}{dx^2}\left[A.sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right]\right\}.\left[-EI\frac{d^2}{dx^2}\left[sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right]\right] dx = 0$$

$$EI\frac{q}{2}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \int_0^L x^2 sen\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx - EI\frac{q\pi^2}{2L}\int_0^L x.sen\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx$$
$$- (EI)^2 A\left(\frac{\pi}{L}\right)^3 \int_0^L sen^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)\left(\frac{\pi}{L}\right) dx = 0$$

Los valores de las integrales habían sido determinados al emplear el método de Galerkin, por lo tanto reemplazaremos directamente estos valores en la ecuación y despejaremos el valor de A:

$$EI\frac{q}{2}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\left[\left(\frac{L}{\pi}\right)^3(\pi^2 - 4)\right] - EI\frac{q\pi^2}{2L}\left(\frac{L^2}{\pi}\right) - (EI)^2 A\left(\frac{\pi}{L}\right)^3\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$qL\left[\frac{\pi^2-4}{\pi}\right]-qL\pi-\left(\frac{EIA\pi^4}{L^3}\right)=0$$

$$\frac{EIA\pi^4}{L^3}=qL\left[\pi-\frac{4}{\pi}-\pi\right]=-\frac{4qL}{\pi}$$

El valor buscado es:

$$A=-\frac{4qL^4}{\pi^5EI}$$

Reemplazamos y determinamos nuestra solución aproximada:

$$\hat{u}(x)=-\frac{4qL^4}{\pi^5EI}.sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

Calculamos el valor de la solución en el punto medio:

$$\hat{u}(x=L/2)=-\frac{4qL^4}{\pi^5EI}$$

PROBLEMA 2

Tenemos la misma ecuación diferencial que modela el comportamiento de la viga bajo una carga uniformemente distribuida en 1D. En el problema anterior se había utilizado la función de prueba senoidal como función de forma. En este problema se utilizarán tres funciones de forma diferentes, que serán halladas empleando en cada una el método de Galerkin.

Las tres funciones de forma son:

$$a)\ \hat{u}(x)=A\left[\left(\frac{x}{L}\right)^2-\frac{x}{L}\right] \qquad b)\ \hat{u}(x)=A\left[\left(\frac{x}{L}\right)^4-\frac{x}{L}\right] \qquad c)\ \hat{u}(x)=A\left(\frac{x}{L}\right)^4$$

a) Método de Galerkin

La función de prueba a emplear es:

$$\hat{u}(x)=A\left[\left(\frac{x}{L}\right)^2-\frac{x}{L}\right]$$

La metodología propuesta por Galerkin da lugar a la siguiente expresión:

$$\int_D f_i R(\hat{u})dD=0 \quad i=1,2\ldots n$$

Determinamos los valores de f_i y $R(\hat{u})$. Para este problema el residuo adopta una forma diferente dado que depende de la segunda derivada de la función con respecto a la variable x.

$$f_i=\left[\left(\frac{x}{L}\right)^2-\frac{x}{L}\right]$$

$$R(\hat{u}) = \frac{qx(L-x)}{2} - EI\frac{d^2}{dx^2}A\left[\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{x}{L}\right]$$

Reemplazamos y desarrollamos:

$$\int_0^L \left[\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{x}{L}\right] \cdot \left[\frac{qx(L-x)}{2} - EIA\frac{d^2}{dx^2}\left[\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{x}{L}\right]\right] dx = 0$$

$$\int_0^L \left[\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{x}{L}\right] \cdot \left[\frac{qx(L-x)}{2} - EIA\left(\frac{2}{L^2}\right)\right] dx = 0$$

$$\int_0^L \left[\frac{q}{2L}x^3 - \frac{q}{2L^2}x^4 - \frac{q}{2}x^2 + \frac{q}{2L}x^3 - \frac{2EIA}{L^4}x^2 + \frac{2EIA}{L^3}x\right] dx = 0$$

$$\frac{q}{2L}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^L - \frac{q}{2L^2}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^L - \frac{q}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^L + \frac{q}{2L}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^L - \frac{2EIA}{L^4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^L + \frac{2EIA}{L^3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L = 0$$

$$\frac{qL^3}{8} - \frac{qL^3}{10} - \frac{qL^3}{6} + \frac{qL^3}{8} - \frac{2EIA}{3L} + \frac{EIA}{L} = 0$$

$$\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{10} - \frac{1}{6}\right)qL^3 + \left(-\frac{2}{3} + 1\right)\frac{EIA}{L} = 0$$

$$\left(-\frac{1}{60}\right)qL^3 + \left(\frac{1}{3}\right)\frac{EIA}{L} = 0$$

$$\frac{EIA}{3L} = \frac{qL^3}{60}$$

El valor de A obtenido finalmente es:

$$A = \frac{qL^4}{20EI}$$

La función aproximada mediante el método de Galerkin con la nueva función de prueba es:

$$\hat{u}(x) = \frac{qL^4}{20EI}\left[\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{x}{L}\right]$$

El problema no lo solicita en forma explícita, sin embargo, calcularemos la solución en el punto medio de la viga para comparar con la solución analítica:

$$\hat{u}(x = L/2) = \frac{qL^4}{20EI}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\right] = \frac{qL^4}{20EI}\left[\frac{1}{4} - \frac{2}{4}\right]$$

$$\hat{u}(x = L/2) = -\frac{qL^4}{80EI}$$

b) Método de Galerkin

La función de prueba a emplear es:

$$\hat{u}(x) = A\left[\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{x}{L}\right]$$

La ecuación propuesta por el método es:

$$\int_D f_i R(\hat{u}) dD = 0 \quad i = 1,2 \ldots n$$

Nuevamente, determinamos los valores de f_i y $R(\hat{u})$.

$$f_i = \left[\left(\frac{x}{L}\right)^4 - \frac{x}{L}\right]$$

$$R(\hat{u}) = \frac{qx(L-x)}{2} - EI\frac{d^2}{dx^2}A\left[\left(\frac{x}{L}\right)^4 - \frac{x}{L}\right]$$

Reemplazamos y solucionamos para A:

$$\int_0^L \left[\left(\frac{x}{L}\right)^4 - \frac{x}{L}\right] \cdot \left[\frac{qx(L-x)}{2} - EI\frac{d^2}{dx^2}A\left[\left(\frac{x}{L}\right)^4 - \frac{x}{L}\right]\right] dx = 0$$

$$\int_0^L \left[\left(\frac{x}{L}\right)^4 - \frac{x}{L}\right] \cdot \left[\frac{qx(L-x)}{2} - EIA\left[\frac{12x^2}{L^4}\right]\right] dx = 0$$

$$\frac{q}{2L^3}\int_0^L x^5 dx - \frac{q}{2L^4}\int_0^L x^6 dx - \frac{2EIA}{L^8}\int_0^L x^6 dx - \frac{q}{2}\int_0^L x^2 dx + \frac{q}{2L}\int_0^L x^3 dx + \frac{12EIA}{L^5}\int_0^L x^3 dx = 0$$

$$\frac{q}{12L^3}[x^6]_0^L - \frac{q}{14L^4}[x^7]_0^L - \frac{12EIA}{7L^8}[x^7]_0^L - \frac{q}{6}[x^3]_0^L + \frac{q}{8L}[x^4]_0^L + \frac{3EIA}{L^5}[x^4]_0^L = 0$$

$$\frac{qL^3}{12} - \frac{qL^3}{14} - \frac{12EIA}{7L} - \frac{qL^3}{6} + \frac{qL^3}{8} + \frac{3EIA}{L} = 0$$

$$\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8}\right) qL^3 + \left(\frac{21}{7} - \frac{12}{7}\right)\frac{EIA}{L} = 0$$

$$\left(-\frac{5}{168}\right) qL^3 + \left(\frac{9}{7}\right)\frac{EIA}{L} = 0$$

$$A = \frac{(5)(7)}{(168)(9)}\frac{qL^4}{EI} = \frac{(5)(7)}{(2^3)(3)(7)(9)}\frac{qL^4}{EI}$$

Finalmente, el cálculo para A resulta:

$$A = \frac{5qL^4}{216EI}$$

Nótese que el valor de A es positivo, a diferencia de los valores de A calculados con la función de forma del Problema 1. El valor negativo de la solución está implícito al evaluar cualquier valor 0<x<L en la siguiente función:

$$\hat{u}(x) = \frac{5qL^4}{216EI}\left[\left(\frac{x}{L}\right)^4 - \frac{x}{L}\right]$$

Evaluamos en x=L/2 para comparar:

$$\hat{u}(x = L/2) = \frac{5qL^4}{216EI}\left[\left(\frac{L}{2L}\right)^4 - \frac{L}{2L}\right] = \frac{5qL^4}{216EI}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \frac{1}{2}\right] = \frac{5qL^4}{216EI}\left[\frac{1}{16} - \frac{8}{16}\right]$$

$$\hat{u}(x = L/2) = -\frac{35qL^4}{3456EI}$$

c) Método de Galerkin

La función de prueba a emplear es:

$$\hat{u}(x) = A\left[\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{x}{L}\right]$$

La ecuación propuesta por el método es:

$$\int_D f_i R(\hat{u}) dD = 0 \quad i = 1,2 \ldots n$$

Nuevamente, determinamos los valores de f_i y $R(\hat{u})$.

$$f_i = \left(\frac{x}{L}\right)^4$$

$$R(\hat{u}) = \frac{qx(L-x)}{2} - EIA.\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{x}{L}\right)^4$$

Reemplazamos y desarrollamos para A:

$$\int_0^L \left(\frac{x}{L}\right)^4 . \left[\frac{qx(L-x)}{2} - EIA.\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{x}{L}\right)^4\right] dx = 0$$

$$\int_0^L \left(\frac{x}{L}\right)^4 . \left[\frac{qx(L-x)}{2} - EIA\left(\frac{12x^2}{L^4}\right)\right] dx = 0$$

$$\frac{q}{2L^3}\int_0^L x^5 dx - \frac{q}{2L^4}\int_0^L x^6 dx - \frac{12EIA}{L^8}\int_0^L x^6 dx = 0$$

$$\frac{q}{12L^3}[x^6]_0^L - \frac{q}{14L^4}[x^7]_0^L - \frac{12EIA}{7L^8}[x^7]_0^L = 0$$

$$\frac{qL^3}{12} - \frac{qL^3}{14} - \frac{12EIA}{7L} = 0$$

$$\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{14}\right)qL^3-\frac{12}{7}\frac{EIA}{L}=0$$

$$\frac{qL^3}{84}-\frac{12EIA}{7L}=0$$

Finalmente, el valor de A con la nueva función de prueba es:

$$A=\frac{qL^4}{144EI}$$

Reemplazamos el valor de A en la función de forma propuesta:

$$\hat{u}(x)=\frac{qL^4}{144EI}\left(\frac{x}{L}\right)^4$$

Evaluamos en x=L/2:

$$\hat{u}(x=L/2)=\frac{qL^4}{144EI}\left(\frac{L}{2L}\right)^4=\frac{qL^4}{144EI}\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$\hat{u}(x=L/2)=\frac{qL^4}{2304EI}$$

A diferencia de todos los resultados anteriores, la solución de la ecuación aproximada en el punto medio de la viga no otorga un valor consistente con la lógica del problema de deflexión. Esto se debe a que la función de forma propuesta A(x/L)^4 no cumple con las condiciones de borde del problema, lo cual es el primer requisito que debe satisfacer cualquier función de prueba a utilizar. Dicho de otra manera:

$$En\ x=0,\hat{u}=0\ (Satisface\ C.B.)$$
$$En\ x=L,\hat{u}=A\ (No\ Satisface\ C.B.)$$

PROBLEMA 3

Se tiene un problema de propagación. Se debe determinar una función $\hat{x}(t)$ que satisfaga la ecuación diferencial. Como novedad, en este problema tenemos una función de forma polinómica con dos monomios. Cada monomio posee una constante que se debe determinar (A y B), para lo cual, cada monomio será transformado para obtener dos ecuaciones para las dos incógnitas A y B.

Para todos los métodos a emplear:

$$\frac{dx}{dt}=t-x;t>0;x_{(t=0)}=0$$

Nuevamente, empleamos la notación propuesta por Bathe en su libro Finite Element Procedures:

$$L_{2m}(\hat{x})=r$$

La función de prueba propuesta por el Problema 3 es:

$$\hat{x}(t) = At^2 + Bt^3$$

Desarrollamos la expresión del residuo:

$$R(\hat{x}) = r - L_{2m}(\hat{x}) = t - \hat{x} - \frac{d}{dt}(\hat{x}) = t - (At^2 + Bt^3) - \frac{d}{dt}(At^2 + Bt^3)$$

$$R(\hat{x}) = t - At^2 - Bt^3 - 2At - 3Bt^2$$

a) Método de Colocación

Sobre el dominio en t=0.5 y t=1 se impone que el valor del residuo es cero para la solución aproximada. Esto da origen a las dos ecuaciones con dos incógnitas, así:

$$R(\hat{x}) = 0$$

Para t=0.5=1/2.

$$R(\hat{x}) = \frac{1}{2} - A\left(\frac{1}{2}\right)^2 - B\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 2A\left(\frac{1}{2}\right) - 3B\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$\frac{1}{2} - \frac{A}{4} - A - \frac{B}{8} - \frac{3B}{4} = 0$$

$$\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4} + \frac{4}{4}\right)A - \left(\frac{1}{8} + \frac{6}{8}\right)B = 0$$

$$\frac{1}{2} - \left(\frac{5}{4}\right)A - \left(\frac{7}{8}\right)B = 0$$

$$\frac{5}{4}A + \frac{7}{8}B = \frac{1}{2}$$

Para t=1

$$R(\hat{x}) = 1 - A - B - 2A - 3B = 0$$

$$3A + 4B = 1$$

Resuelvo el sistema de ecuaciones de 2 x 2 por sustitución:

$$\frac{5}{4}A + \frac{7}{8}B = \frac{1}{2}$$

$$3A + 4B = 1$$

De 2

$$A = \frac{1 - 4B}{3}$$

Reemplazo A en la primera ecuación:

$$\frac{5}{4}\left(\frac{1-4B}{3}\right)+\frac{7}{8}B=\frac{1}{2}$$

$$\left(-\frac{5}{3}+\frac{7}{8}\right)B=\frac{1}{2}-\frac{5}{12}$$

$$-\frac{19}{24}B=\frac{1}{12}$$

$$B=-\frac{2}{19}=-0.1053$$

De 2

$$A=\frac{1-4\left(-\frac{2}{19}\right)}{3}$$

$$A=\frac{9}{19}=0.4737$$

Luego, la solución aproximada mediante este método, para la ecuación diferencial del problema de propagación, posee los dos coeficientes determinados, así:

$$\hat{x}(t)=\frac{9}{19}t^2-\frac{2}{19}t^3$$

b) Método de Subdominios

El dominio 0<x<1 ha sido dividido en dos intervalos. Sobre estos intervalos se integrará la función del residuo. Se impone la condición de que ambas integrales sean iguales a cero, de tal forma que resultarán dos ecuaciones para dos incógnitas:

$$\int_0^{1/2} R(\hat{x})dt=0$$

$$\int_{1/2}^{1} R(\hat{x})dt=0$$

$$R(\hat{x})=t-At^2-Bt^3-2At-3Bt^2$$

- Primera Integral

$$\int_0^{1/2} R(\hat{x})dt=\int_0^{1/2}(t-At^2-Bt^3-2At-3Bt^2)dt$$

$$\left[\frac{t^2}{2}-A\frac{t^3}{3}-B\frac{t^4}{4}-2A\frac{t^2}{2}-3B\frac{t^3}{3}\right]_0^{1/2}=0$$

$$\frac{1}{8} - A\frac{1}{24} - B\frac{1}{64} - A\frac{1}{4} - B\frac{1}{8} = 0$$

$$\left(\frac{1}{24} + \frac{1}{4}\right)A + \left(\frac{1}{64} + \frac{1}{8}\right)B = \frac{1}{8}$$

$$\frac{7}{24}A + \frac{9}{64}B = \frac{1}{8}$$

- Segunda Integral

$$\int_{1/2}^{1} R(\hat{x})dt = \int_{1/2}^{1} (t - At^2 - Bt^3 - 2At - 3Bt^2)dt$$

$$\left[\frac{t^2}{2} - A\frac{t^3}{3} - B\frac{t^4}{4} - 2A\frac{t^2}{2} - 3B\frac{t^3}{3}\right]_{1/2}^{1} = 0$$

$$\left[\frac{1}{2} - A\frac{1}{3} - B\frac{1}{4} - A - B\right] - \left[\frac{1}{8} - A\frac{1}{24} - B\frac{1}{64} - A\frac{1}{4} - B\frac{1}{8}\right] = 0$$

$$-\left(\frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{24} - \frac{1}{4}\right)A - \left(\frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{64} - \frac{1}{8}\right)B = -\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$$

$$\frac{25}{24}A + \frac{71}{64}B = \frac{3}{8}$$

Resuelvo el sistema de ecuaciones de 2 x 2:

$$\frac{7}{24}A + \frac{9}{64}B = \frac{1}{8}$$

$$\frac{25}{24}A + \frac{71}{64}B = \frac{3}{8}$$

De la ecuación 1

$$A = \frac{7}{162} - \frac{21}{512}B$$

Reemplazo en la ecuación 2

$$\frac{25}{24}\left(\frac{7}{162} - \frac{21}{512}B\right) + \frac{71}{64}B = \frac{3}{8}$$

$$B = -\frac{2}{17} = -0.1176$$

De la ecuación 1

$$A = \frac{7}{162} - \frac{21}{512}\left(-\frac{2}{17}\right)$$

$$A = \frac{33}{68} = 0.4853$$

Luego, la solución aproximada mediante este método, para la ecuación diferencial del problema de propagación, posee los dos coeficientes determinados, así:

$$\hat{x}(t) = \frac{33}{68}t^2 - \frac{2}{17}t^3$$

c) Método de Galerkin

Desarrollamos la solución a partir de las evaluaciones de f_1 y f_2 en la integral propuesta por el método de Galerkin en forma independiente:

$$\int_0^1 f_i R(\hat{x})dt = 0; i = 1,2.$$

$$f_1 = t^2$$

$$f_2 = t^3$$

$$R(\hat{x}) = t - At^2 - Bt^3 - 2At - 3Bt^2$$

- Para f_1

$$\int_0^1 f_1 R(\hat{x})dt = 0$$

$$\int_0^1 (t^2)(t - At^2 - Bt^3 - 2At - 3Bt^2)dt = 0$$

$$\int_0^1 (t^3 - At^4 - Bt^5 - 2At^3 - 3Bt^4)dt = 0$$

$$\left[\frac{t^4}{4} - A\frac{t^5}{5} - B\frac{t^6}{6} - 2A\frac{t^4}{4} - 3B\frac{t^5}{5}\right]_0^1 = 0$$

$$\frac{1}{4} - \frac{A}{5} - \frac{B}{6} - \frac{2A}{4} - \frac{3B}{5} = 0$$

$$\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\right)A - \left(\frac{1}{6} + \frac{3}{5}\right)B = 0$$

$$\frac{7}{10}A + \frac{23}{30}B = \frac{1}{4}$$

- Para f_2

$$\int_0^1 f_2 R(\hat{x})dt = 0$$

$$\int_0^1 (t^3)(t - At^2 - Bt^3 - 2At - 3Bt^2)dt = 0$$

$$\int_0^1 (t^4 - At^5 - Bt^6 - 2At^4 - 3Bt^5)dt = 0$$

$$\left[\frac{t^5}{5} - A\frac{t^6}{6} - B\frac{t^7}{7} - 2A\frac{t^5}{5} - 3B\frac{t^6}{6}\right]_0^1 = 0$$

$$\frac{1}{5} - \frac{A}{6} - \frac{B}{7} - \frac{2A}{5} - \frac{3B}{6} = 0$$

$$\frac{1}{5} - \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{5}\right)A - \left(\frac{1}{7} + \frac{3}{6}\right)B = 0$$

$$\frac{17}{30}A + \frac{9}{14}B = \frac{1}{5}$$

El sistema de ecuaciones resultante es entonces:

$$\frac{7}{10}A + \frac{23}{30}B = \frac{1}{4}$$

$$\frac{17}{30}A + \frac{9}{14}B = \frac{1}{5}$$

De la ecuación 1:

$$A = \frac{10}{28} - \frac{23}{21}B$$

Reemplazo en la ecuación 2:

$$\left(\frac{17}{30}\right)\left(\frac{10}{28} - \frac{23}{21}B\right) + \left(\frac{9}{14}\right)B = \frac{1}{5}$$

$$\frac{(10)(17)}{(28)(30)} - \frac{(23)(17)}{(21)(30)}B + \frac{9}{14}B = \frac{1}{5}$$

$$\frac{(10)(17)}{(28)(30)} - \left(\frac{(23)(17)}{(21)(30)} - \frac{9}{14}\right)B = \frac{1}{5}$$

$$B = \frac{\frac{1}{5} - \frac{(10)(17)}{(28)(30)}}{-\left(\frac{(23)(17)}{(21)(30)} - \frac{9}{14}\right)} = -\frac{3}{28}$$

$$B = -\frac{3}{28} = -0.1071$$

Reemplazo en la ecuación 1:

$$A = \frac{10}{28} - \frac{23}{21}\left(-\frac{3}{28}\right)$$

$$A = \frac{93}{196} = 0.4745$$

Luego, la solución aproximada mediante el método de Galerkin es:

$$\hat{x}(t) = \frac{93}{196}t^2 - \frac{3}{28}t^3$$

d) Método de Mínimos Cuadrados

Para el empleo de éste método utilizaremos las expresiones y la notación propuestas por K.J. Bathe, así:

$$\frac{\partial}{\partial a_i}\int_D R(\hat{x})^2 dD = \int_D R(\hat{x}) L_{2m}(f_i) dD = 0; i = 1{,}2.$$

$$R(\hat{x}) = t - At^2 - Bt^3 - 2At - 3Bt^2$$

$$L_{2m}(f_1) = \frac{\partial}{\partial t}(t^2) = 2t$$

$$L_{2m}(f_2) = \frac{\partial}{\partial t}(t^3) = 3t^2$$

- Para f_1

$$\int_0^1 (t - At^2 - Bt^3 - 2At - 3Bt^2)(2t) dD = 0$$

$$\int_0^1 (2t^2 - 2At^3 - 2Bt^4 - 4At^2 - 6Bt^3) dD = 0$$

$$\left[\frac{2t^3}{3} - \frac{2At^4}{4} - \frac{2Bt^5}{5} - \frac{4At^3}{3} - \frac{6Bt^4}{4}\right]_0^1 = 0$$

$$\frac{2}{3} - \frac{A}{2} - \frac{2B}{5} - \frac{4A}{3} - \frac{3B}{2} = 0$$

$$\frac{11}{6}A + \frac{19}{10}B = \frac{2}{3}$$

- Para f_2

$$\int_0^1 (t - At^2 - Bt^3 - 2At - 3Bt^2)(3t^2) dD = 0$$

$$\int_0^1 (3t^3 - 3At^4 - 3Bt^5 - 6At^3 - 9Bt^4) dD = 0$$

$$\left[\frac{3t^4}{4}-\frac{3At^5}{5}-\frac{Bt^6}{2}-\frac{3At^4}{2}-\frac{9Bt^5}{5}\right]_0^1=0$$

$$\frac{3}{4}-\frac{3A}{5}-\frac{B}{2}-\frac{3A}{2}-\frac{9B}{5}=0$$

$$\frac{3}{4}-\left(\frac{3}{5}+\frac{3}{2}\right)A-\left(\frac{1}{2}+\frac{9}{5}\right)B=0$$

$$\frac{21}{10}A+\frac{23}{10}B=\frac{3}{4}$$

Obtengo el sistema de ecuaciones

$$\frac{11}{6}A+\frac{19}{10}B=\frac{2}{3}$$

$$\frac{21}{10}A+\frac{23}{10}B=\frac{3}{4}$$

De la ecuación 1:

$$A=\frac{12}{33}-\frac{57}{55}B$$

Reemplazo en la ecuación 2:

$$\frac{21}{10}\left(\frac{12}{33}-\frac{57}{55}B\right)+\frac{23}{10}B=\frac{3}{4}$$

$$\frac{42}{55}-\frac{1197}{550}B+\frac{23}{10}B=\frac{3}{4}$$

$$B=-\frac{\frac{3}{4}-\frac{42}{55}}{\left(\frac{1197}{550}-\frac{23}{10}\right)}=-\left(\frac{-\frac{3}{220}}{-\frac{34}{275}}\right)$$

$$B=-\frac{15}{136}=-0.1103$$

Reemplazo en 1

$$A=\frac{12}{33}-\frac{57}{55}B$$

$$A=\frac{12}{33}-\frac{57}{55}\left(-\frac{15}{136}\right)$$

$$A=\frac{65}{136}=0.4779$$

Luego, la solución mediante el método de Mínimos Cuadrados resulta de la siguiente forma:

$$\hat{x}(t) = \frac{65}{136}t^2 - \frac{15}{136}t^3$$

e) Residuos Pesados

Para el empleo de este método utilizamos las dos funciones de peso propuestas por el problema, t y t^2.

$$\int_0^1 tR(\hat{x})dt = 0 \quad y \quad \int_0^1 t^2\, R(\hat{x})dt = 0$$

$$R(\hat{x}) = t - At^2 - Bt^3 - 2At - 3Bt^2$$

Para la función de peso t:

$$\int_0^1 tR(\hat{x})\, dt = 0$$

$$\int_0^1 t(t - At^2 - Bt^3 - 2At - 3Bt^2)dt = \int_0^1 (t^2 - At^3 - Bt^4 - 2At^2 - 3Bt^3)dt = 0$$

$$\left[\frac{t^3}{3} - \frac{At^4}{4} - \frac{Bt^5}{5} - \frac{At^3}{3} - \frac{Bt^4}{4}\right]_0^1 = 0$$

$$\frac{1}{3} - \frac{A}{4} - \frac{B}{5} - \frac{A}{3} - \frac{B}{4} = 0$$

$$\frac{11}{12}A + \frac{19}{20}B = \frac{1}{3}$$

Para la función de peso t^2:

$$\int_0^1 (t - At^2 - Bt^3 - 2At - 3Bt^2)(t^2)dD = 0$$

$$\int_0^1 (t^3 - At^4 - Bt^5 - 2At^3 - 3Bt^4)dD = 0$$

$$\left[\frac{t^4}{4} - \frac{At^5}{5} - \frac{Bt^6}{6} - \frac{2At^4}{4} - \frac{3Bt^5}{5}\right]_0^1 = 0$$

$$\frac{1}{4} - \frac{A}{5} - \frac{B}{6} - \frac{A}{2} - \frac{3B}{5} = 0$$

$$\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\right)A - \left(\frac{1}{6} + \frac{3}{5}\right)B = 0$$

$$\frac{7}{10}A+\frac{23}{30}B=\frac{1}{4}$$

Conformo el sistema de ecuaciones de 2 x 2 siguiente:

$$\frac{11}{12}A+\frac{19}{20}B=\frac{1}{3}$$

$$\frac{7}{10}A+\frac{23}{30}B=\frac{1}{4}$$

De la ecuación 1:

$$A=\frac{4}{11}-\frac{57}{55}B$$

Reemplazo en la ecuación 2:

$$\frac{7}{10}\left(\frac{4}{11}-\frac{57}{55}B\right)+\frac{23}{30}B=\frac{1}{4}$$

$$\frac{14}{55}-\left[\frac{399}{550}-\frac{23}{30}\right]B=\frac{1}{4}$$

$$B=-\frac{\frac{1}{4}-\frac{14}{55}}{\frac{399}{550}-\frac{23}{30}}=-\left(\frac{-\frac{1}{220}}{-\frac{34}{825}}\right)$$

$$B=-\frac{15}{136}=-0.1103$$

Reemplazo en la ecuación 1:

$$A=\frac{4}{11}-\frac{57}{55}\left(-\frac{15}{136}\right)$$

$$A=\frac{65}{136}=0.4779$$

Luego, la solución mediante este método de residuos pesados es:

$$\hat{x}(t)=\frac{65}{136}t^2-\frac{15}{136}t^3$$

CONCLUSIONES

PROBLEMA 1

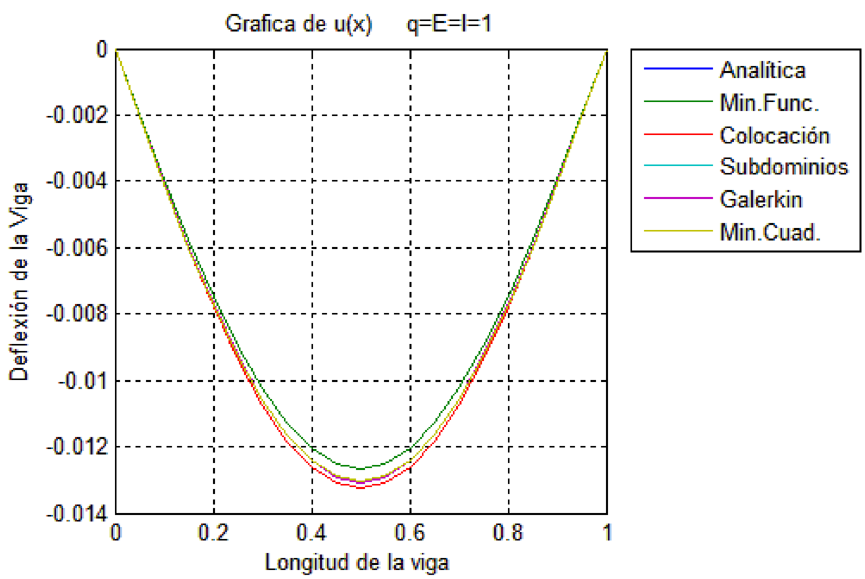
Tabla 1. Soluciones aproximadas de la ecuación diferencial del modelo.

Método de cálculo	Solución	Error Absoluto*	Error Relativo*
Solución Analítica	$u(x=L/2)=-\frac{5qL^4}{384EI}=-0.0130\frac{qL^4}{EI}$	0	0%
Minimizando el funcional	$u(x=L/2)=-\frac{4qL^4}{\pi^5 EI}=-0.0131\frac{qL^4}{EI}$	5.0221e-5 $\frac{qL^4}{EI}$	0.3857%
Colocación	$u(x=L/2)=-\frac{qL^4}{8\pi^2 EI}=-0.0127\frac{qL^4}{EI}$	-3.5569e-4 $\frac{qL^4}{EI}$	-2.7317%
Subdominios	$\hat{u}(x=L/2)=-\frac{qL^4}{24\pi EI}=-0.0133\frac{qL^4}{EI}$	2.4208e-4 $\frac{qL^4}{EI}$	1.8592%
Galerkin	$\hat{u}(x=L/2)=-\frac{4qL^4}{\pi^5 EI}=-0.0131\frac{qL^4}{EI}$	5.0221e-5 $\frac{qL^4}{EI}$	0.3857%
Mínimos Cuadrados	$\hat{u}(x=L/2)=-\frac{4qL^4}{\pi^5 EI}=-0.0131\frac{qL^4}{EI}$	5.0221e-5 $\frac{qL^4}{EI}$	0.3857%

- Todos los métodos aproximaron la solución de la ecuación diferencial bajo las condiciones de borde impuestas. Los métodos de Rayleigh-Ritz (funcional), Galerkin y Mínimos Cuadrados otorgaron la mejor aproximación.

- En la siguiente gráfica se observan las curvas de solución de cada uno de los métodos. Todos describen el comportamiento esperado.

- Es importante tener en cuenta que todas las aproximaciones de la solución fueron calculadas en base a la misma función de prueba.



PROBLEMA 2

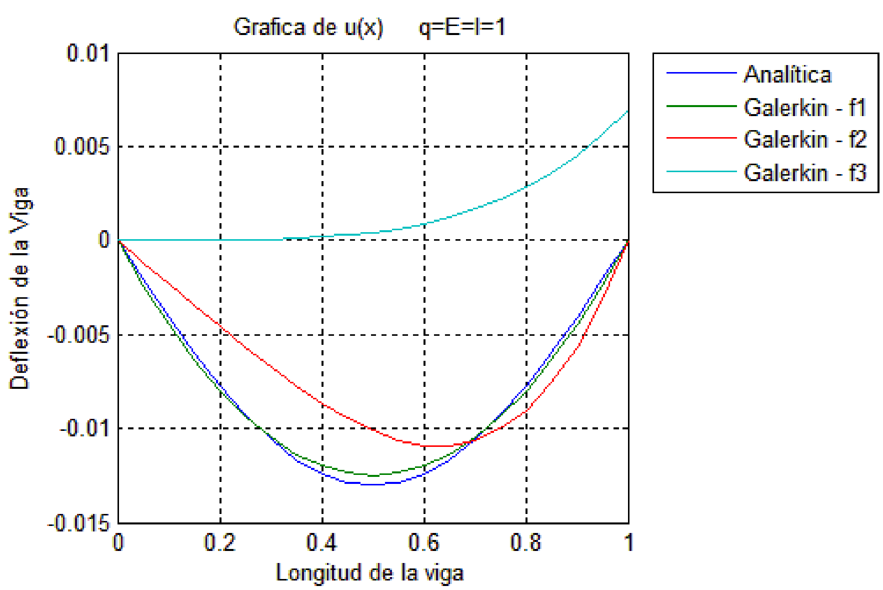
Tabla 2. Soluciones por el método de Galerkin para diferentes funciones de prueba.

Método de cálculo	Solución	Error Absoluto*	Error Relativo*
Solución Analítica	$u(x=L/2) = -\frac{5qL^4}{384EI} = -0.0130\frac{qL^4}{EI}$	0	0 %
Galerkin	$\hat{u}(x=L/2) = -\frac{qL^4}{80EI} = -0.0125\frac{qL^4}{EI}$	-5.2083e-4 $\frac{qL^4}{EI}$	-4 %
Galerkin	$\hat{u}(x=L/2) = -\frac{35qL^4}{3456EI} = -0.101\frac{qL^4}{EI}$	-0.0029 $\frac{qL^4}{EI}$	-22.22 %
Galerkin	$\hat{u}(x=L/2) = \frac{qL^4}{2304EI} = (4.3403e-4)\frac{qL^4}{EI}$	-0.0135 $\frac{qL^4}{EI}$	-103.33 %

- Para diferentes funciones de prueba se utilizó el método de Galerkin para calcular la solución de la ecuación del modelo. Debido a que las soluciones no son simétricas con respecto al punto medio de la barra, solo tiene sentido comparar los valores de la solución analítica con la solución cuadrática que otorga la función de forma del literal a) (Problema 2). El valor del error relativo es de 4 %, mucho mayor que la mayoría de las soluciones halladas para el Problema 1 con la función de forma senoidal. No obstante lo anterior, los resultados del análisis en el punto medio de la barra se muestran en la Tabla 2.

- La función de forma del literal b) no aproxima la solución adecuadamente. El exponente 4 es el responsable de este resultado. Físicamente, la curva de deflexión es simétrica con respecto al punto medio de la viga como resultado de la carga uniformemente distribuida. En otras palabras, el valor de la carga es constante a lo largo de toda la longitud de la viga, de modo que su comportamiento debería causar una deflexión simétrica.

- La función de forma c) no cumple con la condición de borde en el extremo derecho (x=L). Desde un comienzo no es apropiada para ser utilizada como función de prueba.

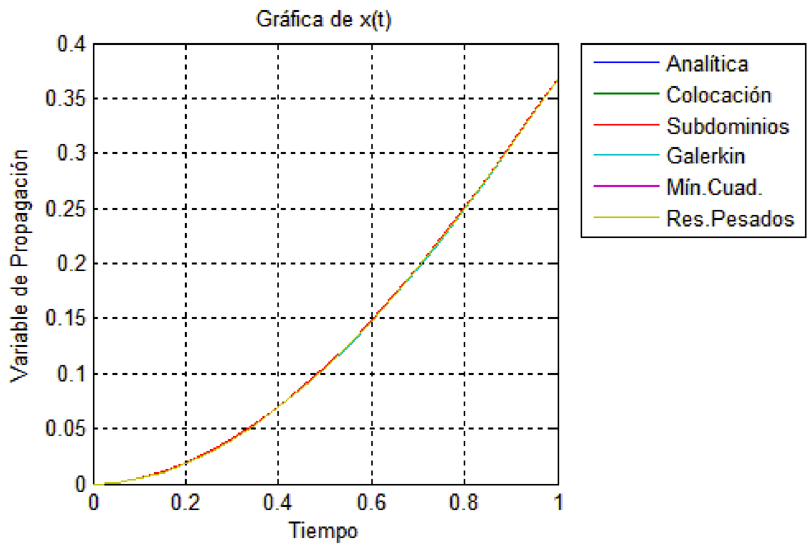


*Las fórmulas empleadas para los cálculos de error son:

$$Error\ Absoluto = u(x) - \hat{u}(x)$$

$$Error\ Relativo = \frac{u(x) - \hat{u}(x)}{|u(x)|}$$

PROBLEMA 3



Se pudo determinar que el problema posee la siguiente solución analítica:

$$x(t) = t - 1 + \frac{1}{e^t}$$

- Se puede concluir sobre la precisión de todos los métodos para la función polinómica propuesta. Todos los métodos otorgan una solución aproximada de la ecuación diferencial. A continuación se presenta el error de cada método evaluado en t=1.

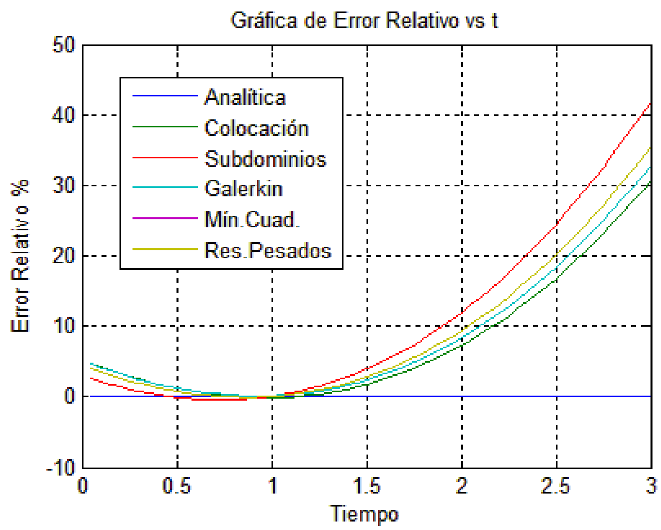
Tabla 3. Errores de las soluciones para el problema de propagación en t=1.

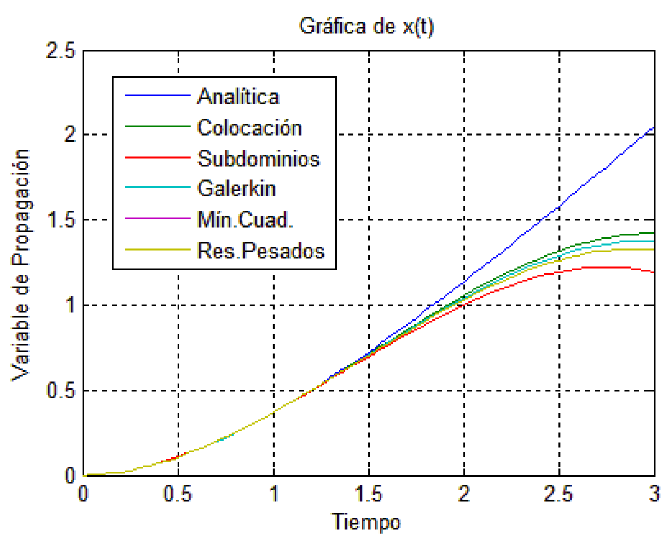
Para t=1		
Método	**Error Absoluto****	**Error Relativo****
Solución Analítica	0	0 %
Colocación	-5.4161e-4	-0.1472 %
Subdominios	2.3238e-4	0.0632 %
Galerkin	5.3250e-4	0.1447 %
Mínimos Cuadrados	2.3238e-4	0.0632 %
Residuos Pesados	2.3238e-4	0.0632 %

- Los métodos de Subdominios, Mínimos Cuadrados y Residuos Pesados sobresalen por tener exactamente la misma solución aproximada, y naturalmente, los mismos errores.

- Se puede concluir también sobre la precisión de la aproximación para valores de t dentro del intervalo $0 \leq t \leq 1$ y fuera del intervalo $t > 1$. Dentro del intervalo $0 \leq t \leq 1$ el error se conserva pequeño, mientras que para un $t > 1$ el error se incrementa.

- Cabe anotar que aún dentro del intervalo $0 \leq t \leq 1$ el error relativo existe en forma importante, ya que es imposible desligar la forma de la función de la influencia del término cuadrático, el cual le da forma parabólica a la función x(t), igual que a la función del error relativo. Esta tendencia no es evidente en el gráfico que compara la solución analítica con las demás soluciones (arriba).





**Las fórmulas empleadas para los cálculos de error son:

$$Error\ Absoluto = x(t) - \hat{x}(t)$$

$$Error\ Relativo = \frac{x(t) - \hat{x}(t)}{|x(t)|}$$