

**Frecuencias naturales del elemento de cáscara  
MITC4 en materiales compuestos**  
*Natural Frequencies of MITC4 shell element in  
composite materials*

por

Fredy Andrés Mercado Navarro

Presentada a la Secretaría de Investigación y Doctorado  
en cumplimiento parcial de los requisitos para obtener el grado de

**Magister en Simulación Numérica y Control**

de la

**UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES**

19 de agosto de 2016

El autor otorga a la UBA el permiso para reproducir y distribuir  
públicamente copias electrónicas y en papel, parciales o totales, de este  
documento de tesis.

Directores de tesis:

Director de tesis: Dr. Eduardo N. Dvorkin  
Co-directora de tesis: Dra. Rita G. Toscano

Miembros del jurado:

Dr. Raúl Bertero.  
Dra. Victoria Vampa.  
Dr. Miguel Cavaliere.

---

# Frecuencias naturales del elemento de cáscara MITC4 en materiales compuestos

por

Fredy Andrés Mercado Navarro

Presentada a la Secretaría de Investigación y Doctorado  
el 19 de agosto de 2016 en cumplimiento parcial de los  
requisitos para obtener el grado de  
Magister en Simulación Numérica y Control

## Resumen

En este trabajo se estudia e implementa la formulación elástica lineal del elemento de cáscara MITC4 para aplicarlo a la modelación de estructuras de materiales compuestos laminares, donde algunas variables de entrada para el modelo son el tipo de material isotrópico u ortótropo de cada capa del compuesto laminar, el número de capas, la orientación de cada capa y la aplicación de un algoritmo para el cálculo de Factores de Corrección para la energía de corte transversal, los cuales cobran mucha importancia en modelos de elementos finitos que asumen deformaciones de corte transversal constantes a través del espesor. Estos Factores de Corrección son especialmente importantes al simular compuestos tipo sandwich donde el material de las láminas exteriores posee módulos elásticos mucho mayores en comparación con los módulos elásticos del núcleo. Este último caso se aprecia en estructuras tipo panel con núcleo de *honeycomb*. El código computacional escrito permite el análisis estático lineal de mallas planas y curvas, al igual que realizar análisis de frecuencias naturales y modos de vibración calculados usando una matriz de masa diagonalizada. El desempeño del código es evaluado al aplicarlo a la solución de varios problemas de prueba de los cuales se conoce su solución analítica y mediante comparación con soluciones de códigos de elementos finitos comerciales.

---

# Natural frequencies of MITC4 shell element in composite materials

by

Fredy Andrés Mercado Navarro

Submitted to the Office of Investigation and Doctoral Studies

on 19 of august of 2016 in partial fulfillment

of the requirements for the degree of

Master of Science in Numerical Simulation and Control

## Abstract

This work is concerned with the study and implementation of the linear elastic formulation of MITC4 shell element, which is applied to the simulation of composite laminates and sandwich structures. Some input variables for the model are the isotropic or orthotropic material type of every layer, the number of layers, their orientation and the application of an algorithm for the calculation of Shear Correction Factors for the transverse shear strain energies. These Factors are very important for finite element formulations that assume constant transverse shear strains through the thickness of the elements. The sensitivity of the application of the SCF's on the FEM solution can be seen clearly when simulating sandwich type composites in which the transverse shear modulus of the face sheets are higher than the transverse shear modulus of the core, as it occurs in honeycomb composites. The Matlab<sup>®</sup> code written is intended for the linear static analysis of plane and curved meshes. Analysis of natural frequencies and mode shapes using a lumped mass matrix is also possible. The performance of the code is evaluated through its application to the solution of several benchmark problems and through the comparison of the results with the solutions given by commercial finite element packages.

---

## Agradecimientos

A mis padres, por su apoyo incondicional.

A la Republica Argentina y a su sistema de educación pública, por aceptarme y brindarme tan valiosa formación.

A los doctores Eduardo Dvorkin y Rita Toscano, por brindarme su apoyo, su conocimiento, su tiempo y sus consejos.

A todos los docentes, profesores asistentes y al personal administrativo de la UBA, por su aporte a mi formación.

A Marda, mi pareja, por su apoyo y comprensión.

# Índice general

<b>1. Los elementos tipo Cáscara</b>	<b>11</b>
1.1. El elemento de Ahmad, Irons y Zienkiewicz . . . . .	12
1.2. El problema numérico del bloqueo ( <i>locking</i> ) . . . . .	15
1.2.1. Bloqueo en un elemento de viga recta 2D . . . . .	16
1.2.2. Bloqueo en elementos de viga curvos 2D . . . . .	17
1.2.3. Bloqueo en un elemento de placa . . . . .	18
1.2.4. Ejemplos . . . . .	18
1.2.5. Soluciones al problema del bloqueo . . . . .	19
1.2.6. Conclusiones del capítulo . . . . .	20
<b>2. El elemento MITC4 de una capa</b>	<b>21</b>
2.1. Relación Constitutiva . . . . .	23
2.1.1. Modelo de material isótropo . . . . .	26
2.2. Tensor de deformaciones infinitesimales . . . . .	26
2.3. Uso de seis grados de libertad por nodo . . . . .	31
2.4. Ecuación de equilibrio y matriz de rigidez . . . . .	32
2.5. Análisis de Frecuencias Naturales . . . . .	33
2.5.1. Matriz de Masa Consistente . . . . .	35
2.5.2. Matriz de Masa diagonalizada ( <i>Lumped</i> ) . . . . .	37
2.6. Casos de prueba para materiales isótropos de una capa . . . . .	39
2.6.1. Estabilidad . . . . .	40
2.6.2. <i>Patch test</i> membranaral para $\tau_{xx}$ y $\tau_{yy}$ constantes . . . . .	41
2.6.3. <i>Patch test</i> de corte en plano para $\tau_{xy}$ constante . . . . .	41
2.6.4. <i>Patch test</i> de flexión para $\tau_{xx}$ y $\tau_{yy}$ constantes . . . . .	41
2.6.5. <i>Patch test</i> de corte transversal para $\tau_{yz}$ y $\tau_{xz}$ constantes . . . . .	42

2.6.6. <i>Patch test</i> de Giro con $\tau_{xy}$ constante . . . . .	43
2.6.7. Vigas en voladizo y placa simplemente apoyada . . . . .	44
2.6.8. Scordelis-Lo roof . . . . .	45
2.6.9. Cilindro pinchado . . . . .	47
2.6.10. Frecuencia fundamental de placa delgada simplemente apoyada .	48
2.6.11. Frecuencias naturales de placa gruesa simplemente apoyada . . .	49
<b>3. Elemento de cáscara para materiales compuestos</b>	<b>52</b>
3.1. Coordenadas naturales reducidas . . . . .	52
3.2. Modelo de material ortótropo . . . . .	55
3.2.1. Orientación del material de las capas . . . . .	57
3.2.2. Convención para coeficientes de Poisson . . . . .	59
3.3. Transformación de relaciones constitutivas . . . . .	61
3.4. Ecuación de equilibrio y matriz de rigidez . . . . .	62
3.5. Factores de corrección de energía de corte transversal . . . . .	63
3.5.1. El factor de corrección en vigas . . . . .	63
3.5.2. El factor de corrección en placas y cáscaras . . . . .	65
3.5.3. Discretización y cálculo de los factores de corrección . . . . .	68
3.6. Casos de prueba para compuestos laminares delgados . . . . .	73
3.6.1. <i>Patch test</i> para elemento de varias capas . . . . .	74
3.6.2. Placa cuadrada ortótropa de una capa con carga de presión . . . .	74
3.6.3. Placa cuadrada de 3 capas con carga de presión uniforme . . . . .	76
3.6.4. Placa ortótropa de 2 capas antisimétrica . . . . .	77
3.6.5. Frecuencias Naturales de placa cuadrada de material compuesto .	78
<b>4. Análisis de compuestos tipo <i>sandwich</i></b>	<b>81</b>
4.1. Materiales compuestos tipo sandwich . . . . .	81
4.2. Compuestos tipo <i>sandwich</i> con núcleo de <i>honeycomb</i> . . . . .	83
4.2.1. Modelado computacional de paneles tipo <i>sandwich</i> con núcleo de <i>honeycomb</i> . . . . .	85
4.3. Casos de prueba para compuestos tipo <i>sandwich</i> . . . . .	86
4.3.1. Viga compuesta con carga de flexión de tres puntos . . . . .	87
4.3.2. Cáscara tipo sandwich de tres capas con carga de presión normal	88

4.3.3. Frecuencias naturales de placa compuesta tipo sandwich con core tipo <i>honeycomb</i> . . . . .	89
4.3.4. Frecuencias Naturales de panel tipo <i>sandwich</i> de capas isótropas .	93
<b>5. Conclusiones</b>	<b>97</b>
<b>A. Transformaciones útiles</b>	<b>99</b>
A.1. Deformaciones convectivas a cartesianas . . . . .	99
A.2. Deformaciones cartesianas a convectivas . . . . .	100
A.3. Deformaciones cartesianas a cartesianas . . . . .	101
<b>B. Resultados adicionales</b>	<b>103</b>
B.1. Prueba de la parcela para Flexión . . . . .	103
B.2. Prueba de la parcela para Corte Transversal . . . . .	104
<b>C. Conceptos básicos</b>	<b>105</b>
C.1. Bases convectivas . . . . .	105
<b>D. Interpolaciones</b>	<b>107</b>
D.1. Geometría . . . . .	107
D.2. Desplazamientos . . . . .	107
<b>E. Tensor de deformaciones infinitesimales</b>	<b>110</b>
E.1. Componentes $\tilde{\epsilon}_{rr}$ y $\tilde{\epsilon}_{ss}$ . . . . .	111
E.2. Componente $\tilde{\epsilon}_{rs}$ . . . . .	111
E.3. Componentes $\tilde{\epsilon}_{rt}$ y $\tilde{\epsilon}_{st}$ . . . . .	111
E.4. Componentes cartesianas . . . . .	112
E.5. Componentes Mixtas $\tilde{\epsilon}_{rt}^{MX} _{lineal}$ y $\tilde{\epsilon}_{st}^{MX} _{lineal}$ . . . . .	112
<b>F. Integración de matrices de rigidez</b>	<b>117</b>
F.1. Integración en sistema convectivo . . . . .	117
F.2. Integración en sistema cartesiano local . . . . .	118
<b>G. Relaciones constitutivas</b>	<b>121</b>
<b>H. Detalles de la Implementación</b>	<b>124</b>

<b>I. Instrucciones de ejecución</b>	<b>127</b>
--------------------------------------	------------



# Índice de figuras

1.1. Elemento de cáscara de Ahmad-Irons-Zienkiewicz. Tomada de [9]. . . . .	13
2.1. Puntos de evaluación para interpolaciones mixtas de las deformaciones de corte transversales, con $r = r_1$ , $s = r_2$ , $t = r_3$ (izq.) e ilustración de las funciones de interpolación mixta de componentes tensoriales (der.). Tomada de [19]. . . . .	22
2.2. Sistema de coordenadas cartesiano local usado en el MITC4 para cada punto de Gauss. Tomada de [19]. . . . .	25
2.3. Malla para <i>patch test</i> [19]. . . . .	41
2.4. Campo $\tau_{xx}$ . $th = 0,001$ , Carga=1000 N en nodos 7 y 8, respectivamente. .	41
2.5. <i>patch test</i> de flexión [19]. . . . .	42
2.6. Rotaciones alrededor de Y. $M_{nodo} = 1$ . . . . .	42
2.7. <i>patch test</i> de corte transversal [19]. . . . .	42
2.8. Rotaciones nodales. $Q=-1$ en nodos 7 y 8. . . . .	42
2.9. Campo $\tau_{xz}$ cte. . . . .	42
2.10. <i>patch test</i> de giro [19]. . . . .	43
2.11. Matlab, $\tau_{xy}$ , $th = 1$ . . . . .	43
2.12. ADINA, $\tau_{xy}$ , $th = 1$ . . . . .	43
2.13. Tensiones $\tau_{xy}$ para malla de 16 x 16. . . . .	44
2.14. Techo con carga de gravedad. . . . .	45
2.15. Desplazamientos con malla de 16x16. . . . .	45
2.16. Convergencia de desplazamientos en el punto B para caso de prueba Scordelis-Lo. Tomada de [19]. . . . .	46
2.17. Problema de Cilindro Pinchado con diafragma. Tomado de [3]. . . . .	47
2.18. Desplazamientos con malla de 20x20 aumentados $5 \times 10^6$ veces. . . . .	47

2.19. Placa simplemente apoyada. . . . .	48
2.20. Modo 1, 11.93 Hz. . . . .	48
3.1. Esquema ilustrativo de algunas variables del elemento MITC4 de varias capas [2]. . . . .	54
3.2. Ilustración del orden de las capas y los espesores $a(r, s)$ y $l^i(r, s)$ [2]. . . .	54
3.3. Definición de ejes de ortotropía $a$ , $b$ , $c$ y vectores locales de referencia en un punto del elemento. . . . .	56
3.4. Definición de ejes de ortotropía del material ( $\underline{1}$ y $\underline{2}$ ) para una malla distorsionada. . . . .	58
3.5. Malla distorsionada de 16 x 16 elementos. . . . .	58
3.6. Campo solución de desplazamientos para malla de 16x16. $\beta = 0$ . . . . .	58
3.7. Campo solución de desplazamientos para malla de 16x16. $\beta = 45$ . . . . .	58
3.8. Disposición de capas y sistema de coordenadas a través del espesor. . . .	69
3.9. Variación de los SCF con la orientación, $E_1/E_2$ , $G_{13}/G_{23}$ , $G_l/G_n$ y $h_n/h_l$ . . . .	72
3.10. Variación de los SCF con el número de capas. Compuesto simétrico de capas ortótropas con orientación $[90/0]_s$ . . . . .	73
3.11. Placa ortótropa de 1 capa. . . . .	75
3.12. Desplazamientos nodales de placa ortótropa. . . . .	75
3.13. Placa 3 capas [2]. . . . .	76
3.14. Desplazamientos. . . . .	76
3.15. T. Von Mises . . . . .	76
3.16. Placa 2 capas antisim. . . . .	77
3.17. Desplazamientos. . . . .	77
3.18. Placa de 9 capas [15]. . . . .	78
3.19. Modo 1, 29.96 Hz. 1/4 de placa. . . . .	78
3.20. Modo 2, 166.94 Hz. 1/4 de placa. . . . .	78
4.1. Panel tipo Honeycomb. Tomada de [7]. . . . .	82
4.2. Placa tipo <i>sandwich</i> sometida a cargas transversales normales [60]. . . . .	83
4.3. Analogía con resortes para el módulo de corte transversal [60]. . . . .	83
4.4. Tensiones de panel tipo <i>honeycomb</i> ante cargas de flexión. Tomada de [28]. . . .	84
4.5. Esquema del núcleo tipo panal de abeja. Tomada de [28]. . . . .	84

4.6. Viga de 7 capas. . . . .	87
4.7. Desplazamientos. . . . .	87
4.8. Panel tipo sandwich [57]. . . . .	88
4.9. Desplazamientos. . . . .	88
4.10. Panel tipo sandwich (3 capas). Tomada de [15]. . . . .	90
4.11. Modos de vibración de panel tipo <i>sandwich</i> con núcleo de <i>honeycomb</i> . Matriz de masa diagonalizada. Malla de 15x10 elementos, con SCF. . . .	92
4.12. Primeras diez frecuencias naturales de panel tipo <i>sandwich</i> . L/h=10. SCF $\kappa_{23} = \kappa_{13} = 0.1447$ . . . . .	94
4.13. Primeras diez frecuencias naturales de panel tipo <i>sandwich</i> . L/h=21. SCF $\kappa_{23} = \kappa_{13} = 0.1447$ . . . . .	94
4.14. Primeras diez frecuencias naturales de panel tipo <i>sandwich</i> . L/h=2151. SCF $\kappa_{23} = \kappa_{13} = 0.1447$ . . . . .	95
B.1. Distribución lineal de rotaciones para Patch Test de Flexión con SCF=1.0.	103
B.2. Distribución lineal de desplazamientos para Patch Test de Corte Transver- sal con SCF=1.0. . . . .	104

# Capítulo 1

## Los elementos tipo Cáscara

El uso de elementos tri-dimensionales para modelar problemas con geometrías delgadas presenta algunas dificultades. En primer lugar, tener tres grados de libertad en cada nodo conlleva a grandes coeficientes de rigidez para aquellos desplazamientos relativos a lo largo de un borde correspondiente al espesor, lo que presenta problemas numéricos por mal condicionamiento de las ecuaciones. En segundo lugar, el uso de varios nodos a través del espesor resulta en un gran aumento en el uso de memoria y tiempos de cómputo [4]. Estas son las razones principales para el desarrollo de elementos de placa y de cáscara para modelar geometrías delgadas.

Antes de tratar los elementos de cáscara se hará una corta referencia a algunas hipótesis fundamentales en la teoría de placas y cáscaras. La primera y más importante de ellas es:

**Hipótesis 1.** *Las partículas del material que están originalmente en una línea recta perpendicular a la superficie media de la cáscara permanecen en una línea recta durante las deformaciones.*

Dos teorías que se desprenden de la hipótesis anterior son:

**Teoría de placas delgadas de Kirchhoff (1850):** las deformaciones por corte se desprecian, y la línea recta permanece perpendicular a la superficie media durante las deformaciones.

**Teoría de placas gruesas de Mindlin/Reissner (1945 y 1951):** las deformaciones por corte se incluyen, y la línea que originalmente se hallaba normal a la superficie

media no permanece perpendicular a dicha superficie durante las deformaciones [9]. El elemento MITC4 se ajusta a esta teoría y propone una solución a un problema asociado a estas deformaciones por corte transversal, el cual se tratará en las secciones siguientes. La segunda hipótesis, la cual está limitada a pequeñas deformaciones, es:

**Hipótesis 2.** *El espesor de la cáscara permanece constante durante las deformaciones, luego la componente normal a la superficie media se asume  $\varepsilon_{nn} = 0$ .*

A continuación se menciona la última hipótesis, cuya aplicación a la relación constitutiva 3D permitirá obtener la relación constitutiva para el elemento de cáscara.

**Hipótesis 3.** *Las tensiones en la dirección normal a la superficie media de la cáscara se asumen nulas, de donde  $\tau_{nn} = 0$ .*

Para enfrentar un problema que requiera análisis de geometrías curvas se han tenido las siguientes posibilidades: 1. Desarrollar elementos curvos basados en teoría clásica de cáscaras (las formulaciones son complejas), 2. Usar elementos sólidos 3D de espesor pequeño o 3. Desarrollar elementos de cáscara curvos degenerando elementos sólidos. El elemento básico para el desarrollo de la formulación del MITC4 es el elemento degenerado de Ahmad, Irons y Zienkiewicz (AIZ), al cual se hará referencia en la sección 1.1.

## 1.1. El elemento de Ahmad, Irons y Zienkiewicz

Este elemento de cáscara publicado en 1970 (ver Ref. [4]) presenta una formulación general para un elemento finito curvo degenerado basado en la teoría de Mindlin y Reissner, de forma arbitraria y que incluye el cálculo de deformaciones por corte transversal, lo que permite usar el elemento para modelar geometrías gruesas o delgadas. Es un elemento con continuidad  $C^0$  para todas las variables cinemáticas, esto es, desplazamientos y rotaciones [47], y donde los desplazamientos  $u$ ,  $v$  y  $w$  son calculados de las contribuciones de la interpolación de los desplazamientos de los nodos de la superficie media y de la interpolación de las rotaciones de los vectores nodales normales a dicha superficie. En la Fig. 1.1 se presenta una ilustración del elemento AIZ.

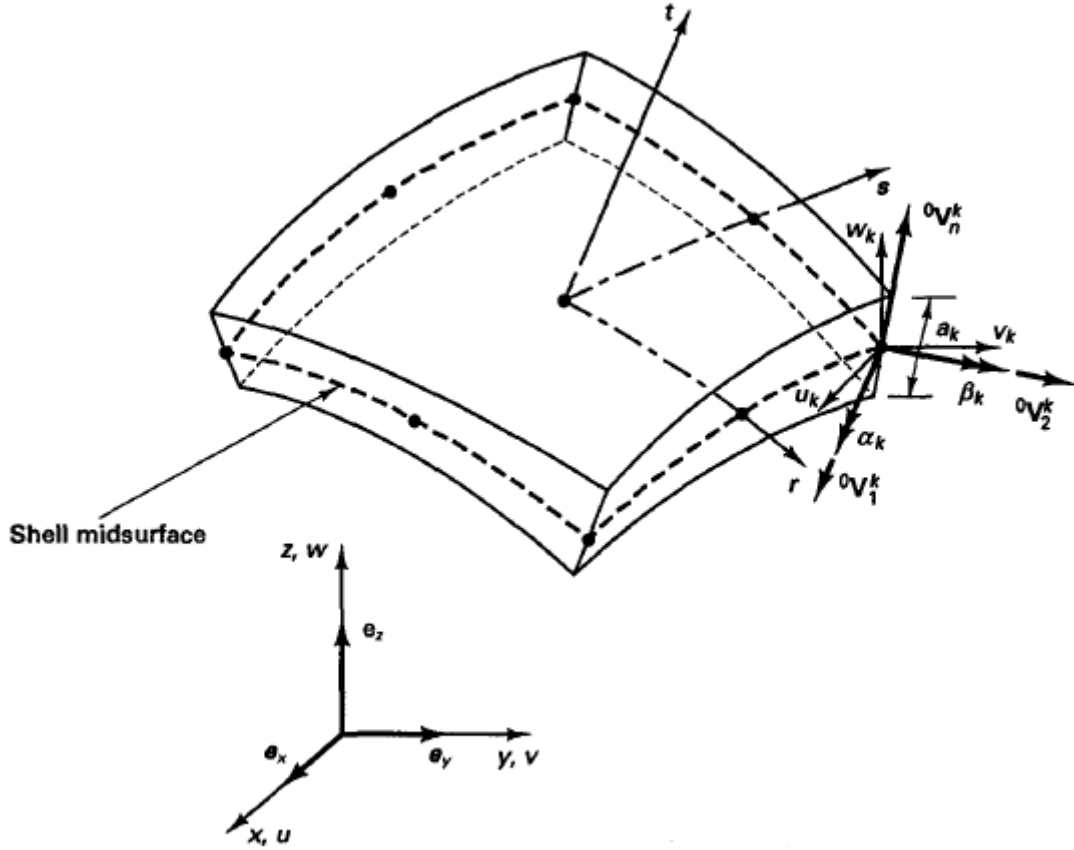


Figura 1.1: Elemento de cáscara de Ahmad-Irons-Zienkiewicz. Tomada de [9].

La geometría del elemento AIZ está definida por:

$${}^l x_i(r, s, t) = \sum_{k=1}^q h_k {}^l x_i^k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k {}^l V_{ni}^k \quad (1.1)$$

Donde  $h_k(r, s)$  son las funciones de interpolación isoparamétricas 2D correspondientes al nodo  $k$ ,

$$h_1 = \frac{1}{4}(1+r)(1+s) \quad h_3 = \frac{1}{4}(1-r)(1-s) \quad (1.2)$$

$$h_2 = \frac{1}{4}(1-r)(1+s) \quad h_4 = \frac{1}{4}(1+r)(1-s) \quad (1.3)$$

${}^l x_i$  son las coordenadas cartesianas de cualquier punto dentro del elemento en el tiempo  $l$ ,  ${}^l x_i^k$  son las coordenadas cartesianas globales del nodo  $k$ ,  $a_k$  es el espesor del elemento en la dirección  $t$  en el nodo  $k$  (se asume invariante durante las deformaciones) y  ${}^l V_{ni}^k$  son

las componentes del vector director unitario  ${}^lV_n^k$  “normal” a la superficie media de la cáscara en la dirección  $t$  en el nodo  $k$ .

En este elemento se han introducido las siguientes hipótesis cinemáticas:

- Los vectores directores permanecen rectos durante la deformación (ver Hipótesis 1).
- Los espesores nodales  $a_k$  permanecen constantes durante la deformación. Esta hipótesis sólo es válida para pequeñas deformaciones (ver Hipótesis 3).

Los desplazamientos para un tiempo  $l = 1$  son,

$$u_i = {}^1x_i - {}^0x_i \quad (1.4)$$

Reemplazando la Ec. 1.1 en la Ec. 1.4, resulta,

$$u_i(r, s, t) = \sum_{k=1}^q h_k u_i^k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k V_{ni}^k \quad (1.5)$$

donde  $\underline{V}_n^k$  es el vector de incrementos a lo largo de los vectores directores de  ${}^0V_n^k$ ,

$$\underline{V}_n^k = {}^1V_n^k - {}^0V_n^k \quad (1.6)$$

Las componentes de  $\underline{V}_n^k$  se expresan en términos de las rotaciones en el nodo alrededor de dos vectores unitarios  ${}^0V_1^k$  y  ${}^0V_2^k$  ortogonales a  ${}^0V_n^k$ .  ${}^0V_1^k$  está definido como,

$${}^0V_1^k = \frac{\underline{e}_y \times {}^0V_n^k}{\|\underline{e}_y \times {}^0V_n^k\|} \quad (1.7)$$

donde  $\underline{e}_y$  es el vector base unitario en dirección del eje  $y$  global. Cuando  ${}^0V_n^k$  es paralelo a  $\underline{e}_y$  se usa  ${}^0V_1^k = \underline{e}_x$  [38].  ${}^0V_2^k$  está definido como,

$${}^0V_2^k = {}^0V_n^k \times {}^0V_1^k \quad (1.8)$$

Si  $\alpha_k$  y  $\beta_k$  son rotaciones infinitesimales del vector director  ${}^0V_n^k$  alrededor de los vectores  ${}^0V_1^k$  y  ${}^0V_2^k$  tenemos que (ver pág. 12 de la Ref. [21]),

$$\underline{V}_n^k = -{}^0V_2^k \alpha_k + {}^0V_1^k \beta_k \quad (1.9)$$

Sustituyendo las componentes de la Ec. 1.9 en la Ec. 1.5 obtenemos,

$$u_i(r, s, t) = \sum_{k=1}^q h_k u_i^k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k (-{}^0V_{2i}^k \alpha_k + {}^0V_{1i}^k \beta_k) \quad (1.10)$$

En el elemento de cáscara AIZ descrito arriba se utilizan 5 grados de libertad, que corresponden a tres desplazamientos  $u_i^k$ , para  $i = 1, 2, 3$  y dos rotaciones  $\alpha_k$  y  $\beta_k$ . Este elemento puede utilizarse para modelar cáscaras de espesor variable dado que los espesores  $a_k$  pueden ser diferentes en cada nodo.

El elemento de cáscara degenerado de Ahmad, Irons & Zienkiewicz se desempeña razonablemente bien en análisis de cáscaras gruesas, sin embargo, no es así para el análisis con elementos delgados donde se usa integración completa para evaluar la matriz de rigidez. Esto último se debe a la aparición de soluciones muy rígidas, que se atribuyen a los denominados bloqueo por corte transversal (*shear locking*) y bloqueo membranar (*membrane locking*). Este tema será tratado con mayor profundidad en la Sección 1.2.

## 1.2. El problema numérico del bloqueo (*locking*)

Un problema asociado al uso de la interpolación para los desplazamientos del elemento AIZ presentada en la Ec. 1.10 es que el elemento bloquea cuando es delgado. Esto se debe a que la discretización de elementos finitos dada por las funciones de forma isoparamétricas no permiten satisfacer la hipótesis de Kirchhoff para cáscaras delgadas [19], en donde las deformaciones por corte transversal se asumen iguales a cero. Es decir, con estas interpolaciones, no es posible que las deformaciones por corte transversal sean cero en todos los puntos del elemento a excepción del caso en el cual tanto las rotaciones como los desplazamientos nodales sean iguales a cero. El fenómeno del bloqueo se presenta en modelos de elementos finitos basados en desplazamientos, en donde se produce una rigidez artificial de los elementos a medida que la razón entre su espesor y su longitud característica  $h/L$  decrece [9]. Se ilustrará el bloqueo a través de algunos ejemplos.



### 1.2.1. Bloqueo en un elemento de viga recta 2D

Para los elementos de viga rectos se presenta siempre el bloqueo por corte transversal para elementos de dos nodos y para elementos de tres y cuatro nodos cuando los nodos interiores no se hallan en sus posiciones naturales. A continuación se presenta la expresión para la energía potencial total de la formulación de la viga isoparamétrica 2D, donde se presentan integrales para la contribución de las energías por corte y flexión. La contribución de las cargas al potencial total ha sido omitida, luego el potencial total se puede expresar como [9],

$$\tilde{\Pi} = \int_0^L \left( \frac{d\beta}{dx} \right)^2 dx + \alpha \int_0^L \left( \frac{dw}{dx} - \beta \right)^2 dx; \quad \alpha = \frac{GAk}{EI}; \quad I = \frac{bh^3}{12} \quad (1.11)$$

La Ec. 1.11 muestra la importancia de las contribuciones por flexión y corte a la matriz de rigidez de un elemento. Para este modelo continuo, cuando el espesor  $h \rightarrow 0$  el factor perteneciente al término de corte  $\alpha \rightarrow \infty$ . Esto implica que la restricción de deformaciones por corte iguales a cero tiende a satisfacerse. Entonces, si la rotación total del plano que originalmente se halla normal al eje neutro de la viga está dada por,

$$\beta = \frac{dw}{dx} - \gamma \quad (1.12)$$

y si la deformación por corte  $\gamma = 0$ , obtendríamos que  $\beta = dw/dx$ . El modelo discreto de elementos finitos para la representación del desplazamiento y la rotación del elemento, se expresa como,

$$w = \sum_{i=1}^q h_i w_i \quad \beta = \sum_{i=1}^q h_i \theta_i \quad (1.13)$$

Si cuando  $\alpha \rightarrow \infty$  ( $h \rightarrow 0$ ) las deformaciones no pueden ser cero dentro del volumen del elemento, se introducirá en el análisis una energía de deformación por corte errónea, que puede ser grande comparada con la energía de deformación por flexión [9]. Esto se produce debido a que las funciones de interpolación sólo pueden satisfacer la condición de deformaciones por corte iguales a cero cuando  $w_i$  y  $\theta_i$  sean iguales a cero de manera simultánea. Entonces, ante el caso de una viga 2D delgada con un momento flector en un

extremo (caso dominado por la flexión),  $\alpha \rightarrow \infty$ , pero habrá rotaciones o desplazamientos nodales mayores que cero. En conclusión, las funciones de interpolación no permiten representar deformaciones por corte iguales a cero, error que resultará en desplazamientos mucho menores que los valores exactos debido a la sobre-rigidez del modelo de elementos finitos, es decir, conllevará al bloqueo por corte transversal.

### 1.2.2. Bloqueo en elementos de viga curvos 2D

A diferencia de los elementos de viga rectos tratados en la sección 1.2.1, que sólo presentan bloqueo por corte, los elementos de viga curvos presentan además bloqueo membranar. El bloqueo membranar ocurre también en elementos de cáscara curvos, y es causado por la diferencia de órdenes de términos particulares de las deformaciones membranales. Este tipo de bloqueo es típico en elementos de viga de tres nodos y elementos de cáscara de nueve nodos [67]. A continuación se presenta un ejemplo del problema del bloqueo por corte y membranar. Se trata del elemento de viga curva de tres nodos de Timoshenko, en donde el funcional de la energía potencial total es ([52], p. 52),

$$\Pi = \frac{EI}{2} \left[ \int_0^L \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^2 ds + \alpha_m \int_0^L \left( \frac{du_s}{ds} \right)^2 ds + \alpha_s \int_0^L \left( \frac{du_n}{ds} - \theta \right)^2 ds \right] - W \quad (1.14)$$

donde  $L$  es la longitud de la viga circular medida a lo largo de su eje, las direcciones  $s$  y  $n$  son las direcciones tangencial y normal a su eje, respectivamente, y  $W$  el potencial de las cargas externas. Los factores de la segunda y tercera integral son,

$$\alpha_m = \frac{12}{h^2} \qquad \alpha_s = \frac{12Gk}{h^2} \quad (1.15)$$

de donde es evidente que cuando la viga se hace delgada la segunda y tercera integral actúan como una penalización para imponer las condiciones,

$$\varepsilon_{ss} = \frac{du_s}{ds} = 0 \qquad \gamma_{ns} = \frac{du_n}{ds} - \theta = 0 \quad (1.16)$$

es decir, deformaciones membranales y de corte iguales a cero.

### 1.2.3. Bloqueo en un elemento de placa

La energía potencial de un elemento de placa puede escribirse como [8]:

$$\Pi = \int_A \underline{\kappa}^T \underline{\underline{C}}_b \underline{\kappa} dA + \alpha \int_A \underline{\gamma}^T \underline{\underline{C}}_s \underline{\gamma} dA; \quad \alpha = \frac{L}{h} \quad (1.17)$$

Donde los momentos flectores internos y fuerzas de corte son  $\underline{\underline{C}}_b \underline{\kappa}$  y  $\underline{\underline{C}}_s \underline{\gamma}$ , respectivamente. Luego  $\alpha \rightarrow \infty$  cuando  $h \rightarrow 0$ . Si las funciones de interpolación que abarcan el espacio solución del elemento finito no pueden representar exactamente las deformaciones de corte  $\gamma = 0$  (hipótesis de Kirchhoff-Love para cáscaras delgadas)  $\alpha$  amplificará cualquier error en  $\gamma$  cuando  $h \rightarrow 0$ , conduciendo al bloqueo por corte [33]. El bloqueo es una propiedad del elemento relacionada con la razón  $L/h$  [18]. En el caso de una placa, el único fenómeno de bloqueo ocurre debido a la energía de corte transversal, es decir, no existe bloqueo membranar (ver [29], pág. 70).

### 1.2.4. Ejemplos

En la Ref. [17] se encuentran tres ejemplos que ilustran el problema del bloqueo. Primero se considera el elemento de viga isoparamétrico de dos grados de libertad (*isobeam* [13]). Minimizando el potencial  $\delta\Pi = 0$  y comparando con la solución analítica para una viga en voladizo con carga de momento flector constante se obtiene:

$$\frac{\theta_{FE}^2}{\theta_{AN}^2} = \frac{1}{1 + \frac{G\kappa}{E} \left(\frac{L}{h}\right)^2} \quad (1.18)$$

Se concluye que el elemento bloquea dado que,

- Para elementos gruesos  $(L/h) \rightarrow 0$ , luego  $(\theta_{FE}/\theta_{AN}) \rightarrow 1$  y,
- Para elementos muy delgados  $(L/h) \rightarrow \infty$ , luego  $(\theta_{FE}/\theta_{AN}) \rightarrow 0$ .

Luego, se analiza un elemento de 16 nodos que modela un cuarto de una placa cuadrada simplemente apoyada sujeta a una carga de presión constante. La experimentación numérica muestra que el elemento bloquea al usar integración numérica normal en elementos distorsionados para una razón  $(L/h) > 100$ . Por último se analiza una cáscara curva en voladizo con un sólo elemento parabólico. Se observa que los resultados se deterioran conforme aumenta el ángulo cubierto por el elemento, sin embargo, con 6 elementos

cubriendo el ángulo de  $30^\circ$  los resultados obtenidos son razonables, dado que el fenómeno del bloqueo es una propiedad del elemento. La sensibilidad que también posee el elemento a las distorsiones decrece conforme aumenta su espesor. Para el caso de una cáscara curva el bloqueo también puede ocurrir debido a las deformaciones membranales [29]. Otros ejemplos que demuestran el bloqueo para una placa en voladizo y una placa cuadrada empotrada, ambos con cargas uniformes, pueden ser consultados en el Anexo A de la Ref. [33].

### 1.2.5. Soluciones al problema del bloqueo

Las matrices elementales son evaluadas mediante integración numérica por regla de Gauss. Si el número de puntos de Gauss es suficiente para evaluar las integrales exactamente se está usando integración completa. Si se usan menos se está usando integración reducida [9]. Una solución al problema del bloqueo es usar integración reducida uniforme o integración reducida selectiva sobre los términos de corte, sin embargo, este tipo de integración resulta en deficiencia de rango de la matriz de rigidez, lo que puede producir modos espúrios de energía cero.

El efecto de la integración reducida sobre los ejemplos de la sección 1.2.4 también se analizan en la Ref. [17] y son los siguientes. Para el caso de la viga isoparamétrica sometida a momento flector constante el uso de integración reducida (RI) e integración selectiva (SI) no producen modos espúrios de energía cero y proveen las mismas soluciones, esto es,

$$\frac{\theta_{SI}}{\theta_{AN}} = 1 \qquad \frac{\theta_{RI}}{\theta_{AN}} = 1 \qquad (1.19)$$

Para el caso de la placa simplemente apoyada, el problema del bloqueo se logra remediar aplicando integración reducida sobre la superficie media, aún para grandes distorsiones de la malla, sin embargo, produce un modelo demasiado flexible, es decir,

$$\frac{\theta_{FE}}{\theta_{AN}} > 1 \qquad (1.20)$$

Para el caso de la cáscara curva en voladizo la integración reducida de Gauss de orden 2x2 o 3x3 resulta en valores característicos espúrios con valor de cero, impidiendo

la solución de las ecuaciones gobernantes. En conclusión, la integración reducida no es efectiva para la solución de este modelo.

### 1.2.6. Conclusiones del capítulo

Sobre la información contenida en las secciones anteriores y la Ref. [17] se puede concluir lo siguiente:

- En general, las interpolaciones de los desplazamientos de elementos de cáscara no podrán representar deformaciones de corte transversal iguales a cero dentro del elemento, lo que conducirá al bloqueo por corte transversal, sin embargo, para cáscaras curvas, el bloqueo membranal es más importante ([47], p. 403).
- Para solucionar el bloqueo por corte transversal se puede emplear integración reducida o selectiva, donde es necesario tener en cuenta que estas pueden producir modos de cuerpo rígido espurios (falsos) [29]. Su uso se hace mas crítico para análisis no lineales, donde estos modos espurios se pueden manifestar aún cuando no se apreciaron en un análisis lineal (ver Ej. en Apéndice 2 de Ref. [17]).
- El bloqueo es una propiedad del elemento, por lo cual su razón de aspecto ( $L/h$ ) y su distorsión deben ser mantenidas al mínimo. Este problema numérico también se puede superar reduciendo la razón  $L/h$ , es decir, refinando la malla.
- Para definir una malla apropiada para el análisis de una cáscara se puede probar un elemento con espesor y curvatura típicos, someterlo a un momento flector, comparar su solución con la analítica y concluir si la razón ( $L/h$ ) induce al bloqueo.

En el Capítulo 2 se presentan las Interpolaciones Mixtas de Componentes Tensoriales de las deformaciones de corte transversal para el elemento AIZ de 4 nodos (MITC4), las cuales solucionan el problema del bloqueo sin introducir modos de cuerpo rígido espurios.

Para aquel lector interesado en aprender o profundizar en los conceptos y la teoría de la Mecánica del Medio Continuo que se presenta desde este punto en adelante se recomienda de manera especial el texto de Dvorkin & Goldschmit de la Ref. [20].

## Capítulo 2

# El elemento MITC4 de una capa

El MITC4 (*Mixed Interpolation of Tensorial Components*) es un elemento general de cáscara de 4 nodos formulado a partir del elemento AIZ y publicado por Dvorkin & Bathe en 1986 [19]. Su geometría esta descrita por la Ec. 1.1 y sus desplazamientos por la Ec. 1.10. El elemento permite modelar materiales gruesos o delgados de geometría arbitraria y problemas de grandes desplazamientos y rotaciones pero pequeñas deformaciones. También puede ser usado efectivamente en análisis con no linealidades materiales.

El MITC4 pertenece al grupo de los elementos formulados a partir del método de las Deformaciones Naturales Supuestas (ANS - *Assumed Natural Strains*), el cual permite aliviar los efectos del llamado bloqueo geométrico, dentro del cual se encuentran el bloqueo por corte transversal y el bloqueo membranar. El uso de Deformaciones Supuestas (AS) en coordenadas naturales fue propuesto por primera vez por MacNeal en la Ref. [41] (ver [23]) y posteriormente por Bathe & Dvorkin en las Refs. [19, 10], aunque el nombre (*Assumed Natural Strains*) y su acrónimo ANS son debidos a Park & Stanley [51].

Para el elemento de cáscara degenerado de Ahmad, Irons & Zienkiewicz el bloqueo por corte transversal que busca solucionar el MITC4 está asociado a la derivación de la matriz deformaciones-desplazamientos a partir de la interpolación presentada en la Ec. 1.10 [19]. En general, este método está basado en una evaluación de las componentes de las deformaciones en coordenadas naturales (convectivas) en puntos específicos, y en una re-interpolación para curar las rigideces artificiales causadas por una interpolación insuficiente [43]. El elemento para flexión de placas (ver Ref. [10]) desarrollado a partir

de la formulación original del MITC4 [17, 19] ha sido considerado el elemento ANS más simple de todos [44].

Para el caso del MITC4 la solución al problema del bloqueo por corte transversal se da redefiniendo las deformaciones por corte fuera del plano  $\varepsilon_{13}$  y  $\varepsilon_{23}$  que se derivan de la Ec. 1.10 por interpolaciones en coordenadas naturales  $\tilde{\varepsilon}_{13}|^{MX}$  y  $\tilde{\varepsilon}_{23}|^{MX}$  (mixtas) de la forma:

$$\tilde{\varepsilon}_{rt}|^{MX} = \frac{1}{2}(1+s)\tilde{\varepsilon}_{rt}^{DI}|_A + \frac{1}{2}(1-s)\tilde{\varepsilon}_{rt}^{DI}|_C \quad (2.1)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{st}|^{MX} = \frac{1}{2}(1+r)\tilde{\varepsilon}_{st}^{DI}|_D + \frac{1}{2}(1-r)\tilde{\varepsilon}_{st}^{DI}|_B \quad (2.2)$$

Donde  $\tilde{\varepsilon}_{ij}^{DI}|_P$  son las componentes covariantes del tensor de deformaciones infinitesimales en el sistema de coordenadas naturales  $\tilde{\varepsilon}_{ij}$  evaluadas mediante interpolación directa (DI) en el punto  $P$  a partir de las interpolaciones de los desplazamientos (Ec. 1.10), siendo  $r$  y  $s$  las coordenadas naturales del elemento (ver Fig. 2.1). La aproximación de las deformaciones de corte transversal a través del espesor del elemento de cáscara se asume entonces como constante, dado que la coordenada natural a través del espesor  $t$  no hace parte de las interpolaciones presentadas en las Ecs. 2.1 y 2.2.

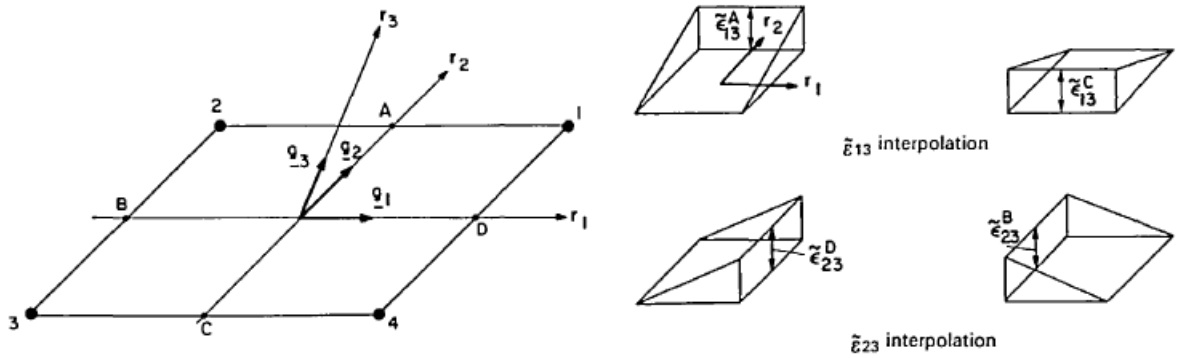


Figura 2.1: Puntos de evaluación para interpolaciones mixtas de las deformaciones de corte transversales, con  $r = r_1$ ,  $s = r_2$ ,  $t = r_3$  (izq.) e ilustración de las funciones de interpolación mixta de componentes tensoriales (der.). Tomada de [19].

La matriz de rigidez del elemento  $m$  se puede calcular usando el funcional:

$$\Pi^* = \frac{1}{2} \int_{oV^{(m)}} \tilde{\tau}^{ij(m)} \tilde{\varepsilon}_{ij}^{(m)o} dV^{(m)} - W^{(m)} \quad (2.3)$$

donde  $\tilde{\tau}^{ij}$  son las componentes contravariantes del tensor de tensiones de Cauchy en el sistema convectivo,  $\tilde{\varepsilon}_{ij}$  son las componentes covariantes del tensor de deformaciones infinitesimales en el sistema convectivo y  $W$  es el potencial de las cargas externas.

Finalmente, las componentes  $\tilde{\varepsilon}_{rr}$ ,  $\tilde{\varepsilon}_{ss}$  y  $\tilde{\varepsilon}_{rs}$  serían evaluadas a partir de las Ecs. 1.1 y 1.10, y las componentes  $\tilde{\varepsilon}_{rt}$  y  $\tilde{\varepsilon}_{st}$  serían evaluadas con las Ecs. 2.1 y 2.2. La juiciosa selección de las interpolaciones para las deformaciones de corte transversal confieren al MITC4 las siguientes características [19]:

1. El elemento puede representar los seis modos de cuerpo rígido.
2. El elemento puede aproximar la hipótesis de Kirchhoff-Love de deformaciones de corte despreciables, es decir, puede ser usado para modelar cáscaras delgadas.
3. El elemento no contiene modos espurios de energía cero si se usa integración numérica completa.

## 2.1. Relación Constitutiva

La relación entre tensiones y deformaciones en el sistema de coordenadas naturales para el cálculo de la matriz de rigidez elemental (Ec. 2.3) es expresada como:

$$\tilde{\tau}^{ij} = \tilde{C}^{ijkl} \tilde{\varepsilon}_{kl} \quad (2.4)$$

donde  $\tilde{C}^{ijkl}$  son las componentes contravariantes del tensor constitutivo de cuarto orden en las coordenadas convectivas  $(r, s, t)$ . La relación constitutiva es conocida en el sistema cartesiano local de bases ortonormales  $\hat{e}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , con la condición  $\hat{\tau}^{33} = 0$ . Denotando este tensor constitutivo como  $\hat{C}^{mnop}$ , el tensor constitutivo para la Ec. 2.4 se obtiene con la siguiente transformación tensorial [20]:

$$\tilde{C}^{ijkl} = (\underline{g}^i \cdot \underline{\hat{e}}_m) (\underline{g}^j \cdot \underline{\hat{e}}_n) (\underline{g}^k \cdot \underline{\hat{e}}_o) (\underline{g}^l \cdot \underline{\hat{e}}_p) \hat{C}^{mnop} \quad (2.5)$$



donde  $\underline{g}^i$  son los vectores base contravariantes del sistema de coordenadas naturales, calculados a partir de los vectores base covariantes, donde:

$$\underline{g}^i = g^{ij} \underline{g}_j \quad g^{ij} = \frac{D^{ij}}{|\underline{J}|^2} \quad \underline{g}_i = \frac{\partial {}^o X}{\partial r_i} \quad g_{ij} = \underline{g}_i \cdot \underline{g}_j \quad (2.6)$$

${}^o X$  se calcula a partir de la Ecuación 1.1,  $D^{ij}$  es el cofactor del término  $g_{ij}$  en la matriz del tensor métrico y  $|\underline{J}|$  es el determinante de la matriz jacobiana en el punto considerado y que se define mediante,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{bmatrix} = \underline{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

En el MITC4 los vectores base del sistema de coordenadas cartesiano local del elemento se definen a partir de los vectores base del sistema convectivo como (ver Fig. 2.2):

$$\hat{\underline{e}}_3 = \frac{\underline{g}_3}{|\underline{g}_3|} \quad \hat{\underline{e}}_1 = \frac{\underline{g}_2 \times \hat{\underline{e}}_3}{|\underline{g}_2 \times \hat{\underline{e}}_3|} \quad \hat{\underline{e}}_2 = \hat{\underline{e}}_3 \times \hat{\underline{e}}_1 \quad (2.8)$$

La transformación de la Ec. 2.5 debe realizarse en cada punto de Gauss y puede expresarse matricialmente como [50],

$$\underline{\tilde{C}} = \underline{Q}^T \hat{\underline{C}} \underline{Q} \quad (2.9)$$

con,

$$\underline{\underline{Q}} = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1 m_1 & m_1 n_1 & n_1 l_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2 m_2 & m_2 n_2 & n_2 l_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & l_3 m_3 & m_3 n_3 & n_3 l_3 \\ 2l_1 l_2 & 2m_1 m_2 & 2n_1 n_2 & l_1 m_2 + m_1 l_2 & m_1 n_2 + n_1 m_2 & n_1 l_2 + l_1 n_2 \\ 2l_2 l_3 & 2m_2 m_3 & 2n_2 n_3 & l_2 m_3 + m_2 l_3 & m_2 n_3 + n_2 m_3 & n_2 l_3 + l_2 n_3 \\ 2l_1 l_3 & 2m_1 m_3 & 2n_1 n_3 & m_1 l_3 + l_1 m_3 & n_1 m_3 + m_1 n_3 & l_1 n_3 + n_1 l_3 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

y donde,

$$l_1 = \underline{g}^r \cdot \hat{e}_1 \quad m_1 = \underline{g}^s \cdot \hat{e}_1 \quad n_1 = \underline{g}^t \cdot \hat{e}_1 \quad (2.11)$$

$$l_2 = \underline{g}^r \cdot \hat{e}_2 \quad m_1 = \underline{g}^s \cdot \hat{e}_2 \quad n_1 = \underline{g}^t \cdot \hat{e}_2 \quad (2.12)$$

$$l_3 = \underline{g}^r \cdot \hat{e}_3 \quad m_1 = \underline{g}^s \cdot \hat{e}_3 \quad n_1 = \underline{g}^t \cdot \hat{e}_3 \quad (2.13)$$

La matriz  $\hat{\underline{\underline{C}}}$  se expresa matricialmente de acuerdo al contenido de la Sección 2.1.1. Para más detalles acerca de la transformación de la Ec. 2.9 remitirse al Anexo A.

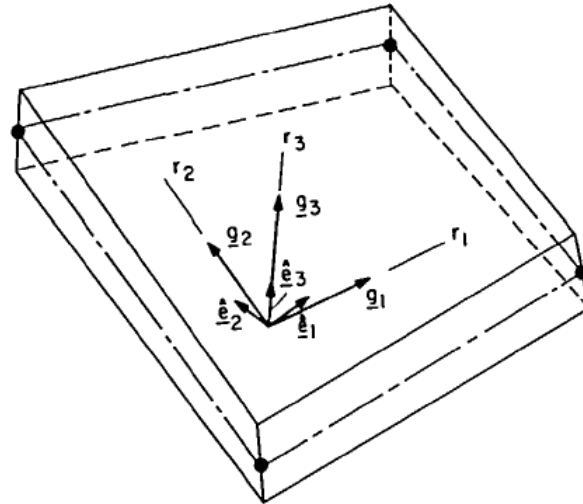


Figura 2.2: Sistema de coordenadas cartesiano local usado en el MITC4 para cada punto de Gauss. Tomada de [19].

### 2.1.1. Modelo de material isótropo

La matriz constitutiva para el elemento MITC4 se encuentra a partir de la relación tensiones-deformaciones de elasticidad 3D, la cual está escrita en ejes locales para poder introducir la condición de tensión plana  $\hat{\tau}_{33} = 0$ . La relación entre las tensiones y las deformaciones locales se obtiene haciendo  $\hat{\varepsilon}_{33} = 0$  (ver [47], pág. 445). Si se impone la condición  $\hat{\tau}_{33} = 0$  también se llega al mismo resultado (ver [60], pág. 80):

$$\hat{\underline{\underline{C}}} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

El modelo de material isótropo se define con dos constantes, el módulo de Young  $E$  y el coeficiente de Poisson  $\nu$ . La constante  $\kappa$  es el Factor de Corrección de la energía de corte transversal (SCF). Para materiales isótropos y homogéneos su valor es constante e igual a 5/6. La simulación de materiales compuestos usando elementos finitos cuyas deformaciones se asumen constantes a través del espesor son especialmente sensibles al uso de los SCF, tema que se abordará con mayor detalle a partir de la Sección 3.5.

## 2.2. Tensor de deformaciones infinitesimales

Las componentes de las deformaciones para el elemento MITC4 para análisis lineales se obtienen a partir de las componentes del tensor de deformaciones infinitesimales (ver detalles en Anexo E),

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}|_{\text{lineal}} = \frac{1}{2} \left[ {}^o g_i \cdot \frac{\partial \underline{U}}{\partial r_j} + {}^o g_j \cdot \frac{\partial \underline{U}}{\partial r_i} \right] \quad (2.15)$$

Desde este punto en adelante  $\tilde{\varepsilon}_{ij} = \tilde{\varepsilon}_{ij}|_{\text{lineal}}$ . A continuación se escriben las componentes lineales del tensor de deformaciones infinitesimales para el elemento MITC4, teniendo en cuenta que las componentes de las deformaciones en el sistema convectivo  $\tilde{\varepsilon}_{rr}$ ,  $\tilde{\varepsilon}_{ss}$  y  $\tilde{\varepsilon}_{rs}$

se derivan a partir de la Ec. 2.15, mientras que las componentes de las deformaciones de corte transversal  $\tilde{\varepsilon}_{st}$  y  $\tilde{\varepsilon}_{rt}$  se hallan a partir de las interpolaciones presentadas en las Ecs. 2.1 y 2.2 [19]:

$$\tilde{\varepsilon}_{ii} = h_{k,i} \, {}^o g_i \cdot \underline{u}_k + \frac{t}{2} h_{k,i} a_k \left( -\alpha_k \, {}^o V_2^k \cdot {}^o g_i + \beta_k \, {}^o V_1^k \cdot {}^o g_i \right) \quad i = 1, 2 \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{12} = \frac{1}{2} \left[ h_{k,2} \, {}^o g_1 \cdot \underline{u}_k + h_{k,1} \, {}^o g_2 \cdot \underline{u}_k + \frac{t}{2} h_{k,2} a_k \left( -\alpha_k \, {}^o V_2^k \cdot {}^o g_1 + \beta_k \, {}^o V_1^k \cdot {}^o g_1 \right) \right] \\ + \frac{1}{2} \left[ \frac{t}{2} h_{k,1} a_k \left( -\alpha_k \, {}^o V_2^k \cdot {}^o g_2 + \beta_k \, {}^o V_1^k \cdot {}^o g_2 \right) \right] \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{13} = \frac{(1+s)}{8} \left[ {}^o g_{3i}^A (u_i^1 - u_i^2) + \frac{1}{2} {}^o g_{1i}^A \left( -\alpha_1 a_1 \, {}^o V_{2i}^1 + \beta_1 a_1 \, {}^o V_{1i}^1 - \alpha_2 a_2 \, {}^o V_{2i}^2 + \beta_2 a_2 \, {}^o V_{1i}^2 \right) \right] \\ + \frac{(1-s)}{8} \left[ {}^o g_{3i}^C (u_i^4 - u_i^3) + \frac{1}{2} {}^o g_{1i}^C \left( -\alpha_4 a_4 \, {}^o V_{2i}^4 + \beta_4 a_4 \, {}^o V_{1i}^4 - \alpha_3 a_3 \, {}^o V_{2i}^3 + \beta_3 a_3 \, {}^o V_{1i}^3 \right) \right] \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{23} = \frac{(1+r)}{8} \left[ {}^o g_{3i}^D (u_i^1 - u_i^4) + \frac{1}{2} {}^o g_{2i}^D \left( -\alpha_1 a_1 \, {}^o V_{2i}^1 + \beta_1 a_1 \, {}^o V_{1i}^1 - \alpha_4 a_4 \, {}^o V_{2i}^4 + \beta_4 a_4 \, {}^o V_{1i}^4 \right) \right] \\ + \frac{(1-r)}{8} \left[ {}^o g_{3i}^B (u_i^2 - u_i^3) + \frac{1}{2} {}^o g_{2i}^B \left( -\alpha_2 a_2 \, {}^o V_{2i}^2 + \beta_2 a_2 \, {}^o V_{1i}^2 - \alpha_3 a_3 \, {}^o V_{2i}^3 + \beta_3 a_3 \, {}^o V_{1i}^3 \right) \right] \end{aligned} \quad (2.19)$$

Debido a la forma abreviada de escribir las Ecs. 2.16 a 2.19 tenemos que las siguientes expresiones son equivalentes:  $\tilde{\varepsilon}_{11} \equiv \tilde{\varepsilon}_{rr}$ ,  $\tilde{\varepsilon}_{22} \equiv \tilde{\varepsilon}_{ss}$ ,  $\tilde{\varepsilon}_{12} \equiv \tilde{\varepsilon}_{rs}$ ,  $\tilde{\varepsilon}_{23} \equiv \tilde{\varepsilon}_{st}$ ,  $\tilde{\varepsilon}_{13} \equiv \tilde{\varepsilon}_{rt}$ . Se ha utilizado la siguiente notación:  $h_{k,i} = \partial h_k / \partial r_i$  son las derivadas de las funciones de forma del nodo  $k$ ,  $\underline{U}_k^T = [u_1^k, u_2^k, u_3^k] = [u^k, v^k, w^k]$  son las componentes del desplazamiento en el nodo  $k$ ,  ${}^o g_{ij}^P$  es la componente  $j$  del vector base covariante  $i$  en el punto de interpolación  $P$ ,  ${}^o V_1^k$  y  ${}^o V_2^k$  son los vectores en el nodo  $k$  definidos en las Ecuaciones 1.7 y 1.8. Las expresiones presentadas de la Ec. 2.16 a la Ec. 2.19 se determinaron a partir de la Ec. 2.15, resultando,

$$\tilde{\varepsilon}_{rr}|^{ID} = \frac{\partial^o x}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^o y}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^o z}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial r} \quad (2.20)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{ss}|^{ID} = \frac{\partial^o x}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial^o y}{\partial s} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial^o z}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial s} \quad (2.21)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{rs}|^{ID} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^o x}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial^o y}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial^o z}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial^o x}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial^o y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial^o z}{\partial s} \right] \quad (2.22)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{st}|^{ID} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^o x}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^o y}{\partial s} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^o z}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial^o x}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s} \frac{\partial^o y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial^o z}{\partial t} \right] \quad (2.23)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{rt}|^{ID} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^o x}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^o y}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^o z}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial^o x}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial^o y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial^o z}{\partial t} \right] \quad (2.24)$$

donde el superíndice ID hace referencia a la Interpolación Directa de las deformaciones. Teniendo en cuenta la expresión para los desplazamientos presentada en la Ec. 1.10, es posible escribir sus derivadas con respecto a las coordenadas convectivas  $r$ ,  $s$  y  $t$  como,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial r} \\ \frac{\partial w}{\partial r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial r} & 0 & 0 & -\frac{t}{2}a_1 \frac{\partial h_1}{\partial r} {}^oV_{2x}^1 & \frac{t}{2}a_1 \frac{\partial h_1}{\partial r} {}^oV_{1x}^1 & \dots & \frac{t}{2}a_4 \frac{\partial h_4}{\partial r} {}^oV_{1x}^4 \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial r} & 0 & -\frac{t}{2}a_1 \frac{\partial h_1}{\partial r} {}^oV_{2y}^1 & \frac{t}{2}a_1 \frac{\partial h_1}{\partial r} {}^oV_{1y}^1 & \dots & \frac{t}{2}a_4 \frac{\partial h_4}{\partial r} {}^oV_{1y}^4 \\ 0 & 0 & \frac{\partial h_1}{\partial r} & -\frac{t}{2}a_1 \frac{\partial h_1}{\partial r} {}^oV_{2z}^1 & \frac{t}{2}a_1 \frac{\partial h_1}{\partial r} {}^oV_{1z}^1 & \dots & \frac{t}{2}a_4 \frac{\partial h_4}{\partial r} {}^oV_{1z}^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u^1 \\ v^1 \\ w^1 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \\ u^2 \\ \vdots \\ \beta_4 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} \\ \frac{\partial v}{\partial s} \\ \frac{\partial w}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial s} & 0 & 0 & -\frac{t}{2}a_1 \frac{\partial h_1}{\partial s} {}^oV_{2x}^1 & \frac{t}{2}a_1 \frac{\partial h_1}{\partial s} {}^oV_{1x}^1 & \dots & \frac{t}{2}a_4 \frac{\partial h_4}{\partial s} {}^oV_{1x}^4 \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial s} & 0 & -\frac{t}{2}a_1 \frac{\partial h_1}{\partial s} {}^oV_{2y}^1 & \frac{t}{2}a_1 \frac{\partial h_1}{\partial s} {}^oV_{1y}^1 & \dots & \frac{t}{2}a_4 \frac{\partial h_4}{\partial s} {}^oV_{1y}^4 \\ 0 & 0 & \frac{\partial h_1}{\partial s} & -\frac{t}{2}a_1 \frac{\partial h_1}{\partial s} {}^oV_{2z}^1 & \frac{t}{2}a_1 \frac{\partial h_1}{\partial s} {}^oV_{1z}^1 & \dots & \frac{t}{2}a_4 \frac{\partial h_4}{\partial s} {}^oV_{1z}^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u^1 \\ v^1 \\ w^1 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \\ u^2 \\ \vdots \\ \beta_4 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{\partial w}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}a_1 h_1 {}^oV_{2x}^1 & \frac{1}{2}a_1 h_1 {}^oV_{1x}^1 & \dots & \frac{1}{2}a_4 h_4 {}^oV_{1x}^4 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}a_1 h_1 {}^oV_{2y}^1 & \frac{1}{2}a_1 h_1 {}^oV_{1y}^1 & \dots & \frac{1}{2}a_4 h_4 {}^oV_{1y}^4 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}a_1 h_1 {}^oV_{2z}^1 & \frac{1}{2}a_1 h_1 {}^oV_{1z}^1 & \dots & \frac{1}{2}a_4 h_4 {}^oV_{1z}^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u^1 \\ v^1 \\ w^1 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \\ u^2 \\ \vdots \\ \beta_4 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Luego, se tienen en cuenta las interpolaciones mixtas del MITC4. Para mayor claridad, se reescriben las expresiones dadas anteriormente en las Ecs. 2.1 y 2.2,

$$\tilde{\varepsilon}_{rt}|^{MX} = \frac{1}{2}(1+s)\tilde{\varepsilon}_{rt}^{DI}|_A + \frac{1}{2}(1-s)\tilde{\varepsilon}_{rt}^{DI}|_C \quad (2.28)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{st}|^{MX} = \frac{1}{2}(1+r)\tilde{\varepsilon}_{st}^{DI}|_D + \frac{1}{2}(1-r)\tilde{\varepsilon}_{st}^{DI}|_B \quad (2.29)$$

Las componentes de las deformaciones  $\tilde{\varepsilon}_{rt}^{DI}$  y  $\tilde{\varepsilon}_{st}^{DI}$  presentes en las Ecs. 2.28 y 2.29 deben evaluarse en los puntos de atadura (*tying points*) con coordenadas convectivas

$A(0, 1, 0)$ ,  $B(-1, 0, 0)$ ,  $C(0, -1, 0)$  y  $D(1, 0, 0)$ . Las componentes de las deformaciones de las Ecs. 2.20 a 2.22, 2.28 y 2.29 pueden escribirse entonces como ([29], pág. 73):

$$\begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon}_{rr}|^{ID} \\ \tilde{\varepsilon}_{ss}|^{ID} \\ 2\tilde{\varepsilon}_{rs}|^{ID} \\ 2\tilde{\varepsilon}_{st}|^{MX} \\ 2\tilde{\varepsilon}_{rt}|^{MX} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{B}_{rr}^{ID} \\ \underline{B}_{ss}^{ID} \\ \underline{B}_{rs}^{ID} \\ \underline{B}_{st}^{MX} \\ \underline{B}_{rt}^{MX} \end{bmatrix} \cdot \hat{\underline{U}} \quad \quad \tilde{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{B}} \cdot \hat{\underline{U}} \quad (2.30)$$

donde  $\tilde{\underline{\varepsilon}}$  ( $5 \times 1$ ) es el vector columna formado con las componentes curvilíneas covariantes diferentes de cero del tensor de deformación infinitesimal,  $\underline{\underline{B}}$  ( $5 \times 20$ ) es la matriz deformaciones-desplazamientos formada a partir de las matrices que relacionan el vector de desplazamientos y rotaciones nodales  $\hat{\underline{U}}$  ( $20 \times 1$ ) con una componente particular de las deformaciones. Estas matrices tienen dimensión  $\underline{B}_{ij}^{INT}(1 \times 20)$ .

Debe notarse que en la formulación del MITC4 se asume que el espesor de la cáscara es constante, luego la componente de la deformación  $\tilde{\varepsilon}_{tt}$  a través del espesor del elemento es cero [19]. Es posible obtener los vectores de deformaciones en los sistemas cartesiano global  $\underline{\varepsilon}$  y cartesiano local  $\hat{\underline{\varepsilon}}$  a partir de las deformaciones en el sistema de coordenadas convectivo  $\tilde{\underline{\varepsilon}}$  mediante las expresiones [50],

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\underline{Q}} \tilde{\underline{\varepsilon}} \quad (2.31)$$

con (ver Ec. 2.10),

$$l_1 = \underline{g}^r \cdot \underline{i} \quad m_1 = \underline{g}^s \cdot \underline{i} \quad n_1 = \underline{g}^t \cdot \underline{i} \quad (2.32)$$

$$l_2 = \underline{g}^r \cdot \underline{j} \quad m_1 = \underline{g}^s \cdot \underline{j} \quad n_1 = \underline{g}^t \cdot \underline{j} \quad (2.33)$$

$$l_3 = \underline{g}^r \cdot \underline{k} \quad m_1 = \underline{g}^s \cdot \underline{k} \quad n_1 = \underline{g}^t \cdot \underline{k} \quad (2.34)$$

y

$$\hat{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \underline{\underline{Q}} \tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}} \quad (2.35)$$

con (ver Ec. 2.10),

$$l_1 = \underline{g}^r \cdot \hat{\underline{e}}_1 \quad m_1 = \underline{g}^s \cdot \hat{\underline{e}}_1 \quad n_1 = \underline{g}^t \cdot \hat{\underline{e}}_1 \quad (2.36)$$

$$l_2 = \underline{g}^r \cdot \hat{\underline{e}}_2 \quad m_1 = \underline{g}^s \cdot \hat{\underline{e}}_2 \quad n_1 = \underline{g}^t \cdot \hat{\underline{e}}_2 \quad (2.37)$$

$$l_3 = \underline{g}^r \cdot \hat{\underline{e}}_3 \quad m_1 = \underline{g}^s \cdot \hat{\underline{e}}_3 \quad n_1 = \underline{g}^t \cdot \hat{\underline{e}}_3 \quad (2.38)$$

Detalles sobre estas transformaciones pueden consultarse en el Anexo A.

### 2.3. Uso de seis grados de libertad por nodo

Con el objetivo de imponer condiciones de borde de rotaciones definidas alrededor de ejes cartesianos globales, tal como lo requieren los casos de prueba con geometría curva de las Secciones 2.6.8 y 2.6.9 se extenderán los grados de libertad nodales de 5 a 6. En el MITC4, los grados de libertad rotacionales están expresados en términos de los vectores nodales  $V_1^k$  y  $V_2^k$ . Estos vectores serán expresados en términos de los ejes cartesianos globales, luego la transformación de las dos rotaciones locales  $\alpha$  y  $\beta$  a los ejes globales introducirá una tercera rotación global ([47], p. 456). La transformación se obtiene de,

$$\hat{\underline{U}}_{glob}^k = \underline{\underline{T}}_{rot}^k \hat{\underline{U}}^k; \quad \text{donde,} \quad \underline{\underline{T}}_{rot}^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_1 & m_1 & n_1 \\ 0 & 0 & 0 & l_2 & m_2 & n_2 \\ 0 & 0 & 0 & l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Donde  $l_i$ ,  $m_i$  y  $n_i$ , para  $i=1,2,3$ , son los cosenos directores entre los ejes cartesianos



globales y nodales (ver Anexo A.3). La matriz de transformación para los grados de libertad rotacionales del elemento de 4 nodos es,

$$\underline{\underline{T}}_{rot} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{T}}_{rot}^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{\underline{T}}_{rot}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{\underline{T}}_{rot}^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{\underline{T}}_{rot}^4 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

El vector de grados de libertad nodales de la Ec. 2.39 incluye la rotación  $\theta_3$ , luego,

$$\hat{\underline{U}}^k = \begin{bmatrix} u^k & v^k & w^k & \theta_1^k & \theta_2^k & \theta_3^k \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Como resultado, la matriz de rigidez elemental  $\underline{\underline{K}}_{[20 \times 20]}^{(m)}$  debe ser expandida para incorporar el tercer grado de libertad rotacional en cada nodo. La matriz de rigidez elemental con los grados de libertad rotacionales transformados al sistema coordenado global es entonces [38],

$$\underline{\underline{K}}_{glob}^{(m)} = \underline{\underline{T}}_{rot}^{-T} \underline{\underline{K}}_{[24 \times 24]}^{(m)} \underline{\underline{T}}_{rot}^{-1} \quad (2.42)$$

El uso de seis grados de libertad en los nodos del MITC4 podría ser necesario debido al acople con otros elementos con rotación alrededor de los ejes coordenados globales o debido a la necesidad de imponer condiciones de borde de simetría [12].

## 2.4. Ecuación de equilibrio y matriz de rigidez

El sistema de ecuaciones de equilibrio para un modelo estático lineal es,

$$\underline{\underline{K}} \cdot \hat{\underline{U}} = \underline{R} \quad (2.43)$$

donde  $\underline{U}$  es el vector de desplazamientos y rotaciones nodales,  $\underline{R}$  el vector de fuerzas y momentos nodales externos y  $\underline{\underline{K}}$  la matriz de rigidez de la malla de elementos finitos, y que puede calcularse como [21, 17],

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{K}} &= \sum_{m=1}^n \underline{\underline{K}}^{(m)} = \sum_{m=1}^n \int_{V^{(m)}} \underline{\underline{\tilde{B}}}^T \underline{\underline{\tilde{C}}} \underline{\underline{\tilde{B}}} dV^{(m)} \\
 &= \sum_{m=1}^n \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{\underline{\tilde{B}}}^T \underline{\underline{\tilde{C}}} \underline{\underline{\tilde{B}}} |\underline{\underline{J}}| dr ds dt
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

donde  $\underline{\underline{\tilde{B}}}$  ( $5 \times 20$ ) es la matriz de deformaciones covariantes/desplazamientos,  $\underline{\underline{\tilde{C}}}$  ( $5 \times 5$ ) es la matriz que almacena las componentes curvilíneas del tensor constitutivo expresada en las bases contravariantes correspondientes [29], simétrica para modelos de material hiperelásticos y elasto-plásticos cuando se usa un modelo de plasticidad asociada [21], y  $\underline{\underline{J}}$  la matriz jacobiana. En este elemento de cáscara la integración numérica se realiza mediante el Método de Cuadratura Gaussiana. Los órdenes de integración en las tres direcciones deben seleccionarse suficientemente altos para evitar modos espurios de energía zero. Durante este trabajo se usa el orden de integración que permite la integración exacta de la matriz de rigidez, es decir,  $2 \times 2 \times 2$  (integración completa).

## 2.5. Análisis de Frecuencias Naturales

El conocimiento de las frecuencias naturales de una estructura y sus modos asociados permite prevenir condiciones de resonancia y es la base para los cálculos de la respuesta dinámica de un sistema ante la aplicación de fuerzas [58]. El objetivo principal del cálculo de modos y frecuencias naturales es compararlas con las frecuencias de excitación para asegurarse de que se encuentran bien separadas [14].

Para determinar las frecuencias naturales de una estructura partimos del modelo descrito por el sistema matricial de ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma dada por la Ec. 2.45.

$$\underline{\underline{M}} \hat{\underline{\underline{U}}} + \underline{\underline{C}} \hat{\underline{\underline{U}}} + \underline{\underline{K}} \underline{\underline{U}} + \underline{\underline{R}}^{ext} = \underline{\underline{0}} \tag{2.45}$$

donde  $M$  es la matriz de masa,  $C$  la matriz de amortiguamiento,  $K$  la matriz de rigidez,  $R^{ext}$  la matriz de fuerzas externas debido a cargas o tensiones iniciales, y  $\hat{\underline{\underline{U}}}$ ,  $\underline{\underline{\dot{U}}}$  y  $\underline{\underline{\ddot{U}}}$  los vectores de desplazamientos, velocidades y aceleraciones nodales del sistema, respectivamente. Una estructura sin amortiguación ( $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{0}}$ ) ni cargas externas ( $\underline{\underline{R}}^{ext} = \underline{\underline{0}}$ )

sufre de movimiento armónico (causado tal vez por sus condiciones iniciales) y donde cada grado de libertad se mueve en fase con todos los demás grados de libertad. El movimiento armónico se modela haciendo

$$\hat{\underline{U}} = \underline{\hat{U}} \sin(\omega t) \quad \text{y} \quad \dot{\hat{\underline{U}}} = -\omega^2 \underline{\hat{U}} \sin(\omega t) \quad (2.46)$$

donde  $\underline{\hat{U}}$  son las amplitudes de vibración de los grados de libertad nodales,  $\omega$  es la *frecuencia circular* (rad/seg) y  $t$  la variable tiempo. La *frecuencia cíclica* (Hz) es  $f = \omega/2\pi$ . Teniendo en cuenta que el sistema no está amortiguado y que no existen cargas externas, el problema dinámico (Ec. 2.45) se reduce a:

$$\underline{\underline{M}} \hat{\underline{U}} + \underline{\underline{K}} \underline{\hat{U}} = \underline{0} \quad (2.47)$$

Reemplazando las Ecs. 2.46 en la Ec. 2.47 obtenemos un problema general de valores característicos  $\lambda$ :

$$(\underline{\underline{K}} - \lambda \underline{\underline{M}}) \underline{\hat{U}} = 0 \quad \text{donde} \quad \lambda = \omega^2 \quad (2.48)$$

Se desean determinar las soluciones no triviales  $\lambda$  del sistema  $(\underline{\underline{K}} - \lambda \underline{\underline{M}})$  que satisfacen

$$\det(\underline{\underline{K}} - \lambda \underline{\underline{M}}) = 0 \quad (2.49)$$

Para cada valor característico  $\lambda_i$  existe un vector característico  $\underline{\hat{U}}_i$ . Al valor diferente de cero  $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$  se le llama la frecuencia de vibración fundamental. Si las matrices  $\underline{\underline{K}}$  y  $\underline{\underline{M}}$  son de tamaño  $n \times n$  la Ec. 2.48 tendrá  $n$  valores característicos  $\lambda_i$  y  $n$  vectores característicos  $\underline{\hat{U}}_i$  siempre que  $\underline{\underline{K}}$  y  $\underline{\underline{M}}$  sean simétricas y definidas positivas. Podemos hacer los vectores  $\underline{\hat{U}}_i$  únicos al normalizarlos, de manera que [69, 14],

$$\underline{\hat{U}}_j^T \underline{\underline{M}} \underline{\hat{U}}_j = 1; \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.50)$$

En un análisis de vibraciones la simetría de la estructura y de las restricciones no implican simetría de todos los modos de vibración. Imponer condiciones de borde de simetría podría implicar la exclusión de todos los modos antisimétricos ([14], pág. 381).

### 2.5.1. Matriz de Masa Consistente

Se denomina “consistente” debido a que las funciones de interpolación que se utilizan para calcularla son las mismas funciones de forma isoparamétricas usadas para generar la matriz de rigidez elemental ([14], pág. 370). La matriz de masa consistente de una malla de elementos finitos está dada por la Ec. 2.51,

$$\underline{\underline{M}}_c = \sum_m \underline{\underline{M}}_c^{(m)} = \sum_m \int_{V^{(m)}} \rho^{(m)} \underline{\underline{H}}^{(m)T} \underline{\underline{H}}^{(m)} dV^{(m)} \quad (2.51)$$

donde  $\underline{\underline{H}}$  es la matriz de interpolación de los desplazamientos y  $\rho^{(m)}$  es la densidad de masa del elemento  $m$ . Las interpolaciones para los desplazamientos en cualquier punto del elemento MITC4 pueden expresarse como  $\underline{U} = \underline{\underline{H}} \cdot \hat{\underline{U}}$ , así,

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & -\frac{t}{2}a_1h_1^oV_{2x}^1 & \frac{t}{2}a_1h_1^oV_{1x}^1 & h_2 & \dots & \frac{t}{2}a_4h_4^oV_{1x}^4 \\ 0 & h_1 & 0 & -\frac{t}{2}a_1h_1^oV_{2y}^1 & \frac{t}{2}a_1h_1^oV_{1y}^1 & 0 & \dots & \frac{t}{2}a_4h_4^oV_{1y}^4 \\ 0 & 0 & h_1 & -\frac{t}{2}a_1h_1^oV_{2z}^1 & \frac{t}{2}a_1h_1^oV_{1z}^1 & 0 & \dots & \frac{t}{2}a_4h_4^oV_{1z}^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u^1 \\ v^1 \\ w^1 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \\ u^2 \\ \vdots \\ \beta_4 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

En la Ec. 2.53 se presenta la matriz de masa consistente para un elemento MITC4 rectangular, calculada a partir de la matriz  $\underline{\underline{H}}$  presentada en la Ec. 2.52, con cinco grados de libertad por nodo, tres de traslación y dos de rotación, densidad  $\rho$ , espesor constante  $a$  y volumen  $V$ , usando funciones de interpolación bilineales.

$$\underline{\underline{M}}_c = \frac{\rho V}{432} \begin{bmatrix} 48 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 48 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 48 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a^2 \\ 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 48 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 48 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 48 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^2 \\ 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 48 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 48 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 48 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a^2 & 0 & 0 & 0 & 4a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a^2 & 0 \\ 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 48 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 48 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 48 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4a^2 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

Como se observa en la Ec. 2.53, la matriz consistente posee elementos por fuera de la diagonal, lo cual no representa en sí un error, pero que produce algunos problemas. Por ejemplo, algunos métodos de integración explícita en el tiempo, principalmente el Método de Diferencias Finitas Centrales, se apoyan en la existencia de una matriz de masa diagonal para conseguir su eficiencia, al igual que otros métodos de integración implícita de segundo y tercer orden [5].

### 2.5.2. Matriz de Masa diagonalizada (*Lumped*)

El interés de este trabajo es implementar un modelo de matriz de masa diagonal para los cálculos de frecuencias naturales de las estructuras compuestas tipo cáscara donde se minimice la pérdida de exactitud. Contraria a la matriz consistente, esta matriz no posee términos por fuera de la diagonal y es más económica en tiempos de cálculo. Su uso implica la pérdida de algo de información y exactitud en las soluciones, sin embargo, es preferible para la solución de problemas dinámicos con integración explícita en el tiempo donde la eficiencia para el cálculo de  $\underline{\underline{M}}^{-1}$  compensa la pérdida de exactitud [70]. Las matrices diagonales pueden ser almacenadas en un vector y son fácilmente invertibles dado que la inversa de una matriz diagonal es también diagonal [22]. Adicionalmente, las matrices de masa diagonales han demostrado ser útiles para ayudar a eliminar oscilaciones numéricas en problemas de propagación de ondas [5, 70].

En el método típico de diagonalización la masa total del elemento se divide entre las celdas de la diagonal asociadas a grados de libertad traslacionales, haciendo el resto de las celdas iguales a cero, es decir, no hay inercias asociadas a los grados de libertad rotacionales. Con este método la matriz diagonal del MITC4 se representaría como,

$$\underline{\underline{M}}_L = \frac{\rho V}{4} \langle 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \rangle_{diag} \quad (2.54)$$

Otro procedimiento es la suma de filas, donde se forma primero la matriz de masa consistente y la suma de los términos de cada fila se deposita en la celda sobre la diagonal. En este método de diagonalización los términos de inercia rotacional también son ignorados [71]. Si el método se aplica a la matriz consistente de la Ec. 2.53 se obtiene como resultado la Ec. 2.54, siendo la masa asociada a cada grado de libertad de traslación 1/4 de la masa total del elemento. Otro método es la llamada “diagonalización óptima”, que resulta de evaluar la matriz de masa usando el método de integración numérica por regla de cuadratura de Lobatto. Aparte de no considerar inercias asociadas a las rotaciones los dos últimos métodos en ocasiones producen masas negativas ([32], p. 445).

Un método de diagonalización que tiene en cuenta las masas rotacionales y que siempre produce masas diagonales positivas es el desarrollado por Hinton, Rock & Zienkiewicz

(HRZ) en la Ref. [30]. Consiste en escalar la diagonal de la matriz de masa consistente para formar la matriz diagonal, seleccionando la constante escalar a modo de preservar la masa total del elemento. Por ser definida positiva, la matriz consistente siempre tiene su diagonal con números positivos. La fórmula es,

$$\underline{\underline{M}}_{HRZ} = \begin{cases} \lambda \delta_{kl} \int_{V^{(m)}} \rho H_i^2 dV & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (2.55)$$

donde,

$$\lambda = \frac{\int_{V^{(m)}} \rho dV}{\sum_{i=1}^n \int_{V^{(m)}} \rho H_i^2 dV} = \frac{\text{Masa total del elemento}}{\text{Suma de celdas diagonales de M consistente}} \quad (2.56)$$

El procedimiento HRZ ha mostrado buen desempeño en problemas de mecánica estructural con tasas de convergencia óptimas, y es el único método de diagonalización que puede recomendarse para cualquier elemento [32]. Al aplicar el método HRZ a la matriz de masa consistente del MITC4, mediante la suma de las celdas diagonales que corresponden a los grados de libertad traslacionales en cada dirección coordenada, se obtiene un factor de escala de 9/4. Al aplicar este factor a la diagonal de la matriz consistente se obtiene, para las cinco celdas diagonales correspondientes a cada grado de libertad [5],

$$\underline{\underline{M}}_{HRZ}^k = \rho V \langle 1/4 \quad 1/4 \quad 1/4 \quad \alpha \quad \alpha \rangle_{diag} \quad (2.57)$$

$$\alpha = (1/48)a^2$$

En la referencia [31], Hughes, Liu y Levit proponen un procedimiento para formar la matriz de masa de elementos de cáscara con grados de libertad de traslación y rotación. La masa de cada grado de libertad de traslación de los nodos de la superficie media del elemento  $\tilde{M}_t^k$  se calcula por suma de filas de la matriz de masa consistente  $\underline{\underline{M}}_c$  [26]. Para un elemento rectangular el resultado es [69],

$$\tilde{M}_t^k = \frac{m}{n} = \frac{m}{4} \quad (2.58)$$

donde  $m$  es la masa total y  $n$  el número de nodos del elemento. Las masas nodales

rotacionales  $\tilde{M}_\theta^k$  se calculan escalando las masas traslacionales por un factor  $\alpha'$ ,

$$\tilde{M}_\theta^k = \alpha' \cdot \tilde{M}_t^k \quad (2.59)$$

donde [62],

$$\alpha' = \frac{m_\theta}{m_t} = \frac{\int_a z^2 dz}{\int_a dz} = \frac{a^2}{12} \quad (2.60)$$

Esto es,  $\tilde{M}_\theta^k$  coincide con el momento de inercia de masa de una barra delgada girando alrededor del punto medio de su longitud. Sustituyendo las Ecs. 2.58 y 2.60 en la Ec. 2.59 resulta,

$$\tilde{M}_\theta^k = \frac{1}{48} a^2 \cdot m \quad (2.61)$$

donde  $a$  es el espesor de la cáscara. Tanto este procedimiento como el HRZ producen la misma matriz de masa diagonalizada en elementos rectangulares (ver Ec. 2.57, con  $m = \rho V$ ). Para la matriz de masa diagonalizada del elemento MITC4 se adoptaron las Ecs. 2.58 y 2.61 para las celdas de la matriz de masa diagonalizada asociadas a los grados de libertad de traslación y rotación, respectivamente, asumiendo el espesor  $a$  como el promedio de los espesores nodales del elemento [2]. Esto es equivalente a adoptar el método HRZ y aplicarlo usando la Ec. 2.57.

## 2.6. Casos de prueba para materiales isótropos de una capa

El objetivo principal de esta sección es poner a prueba las características del código escrito en lenguaje Matlab aplicables a la simulación de estructuras tipo cáscara para materiales isótropos de una capa. Otros objetivos son:

1. Mostrar que la implementación del elemento converge.
2. Comprobar que el elemento no bloquea, es decir, que se aproxima a la hipótesis de Kirchhoff-Love para cáscaras delgadas bajo diferentes configuraciones geométricas.
3. Observar el cambio en las soluciones con el uso del Factor de Corrección para materiales isótropos y homogéneos  $\kappa = 5/6$ .



4. Mostrar que la matriz de masa diagonalizada usando el método HRZ produce resultados satisfactorios para el cálculo de frecuencias naturales.

La medida del error a usar de ahora en adelante es [33],

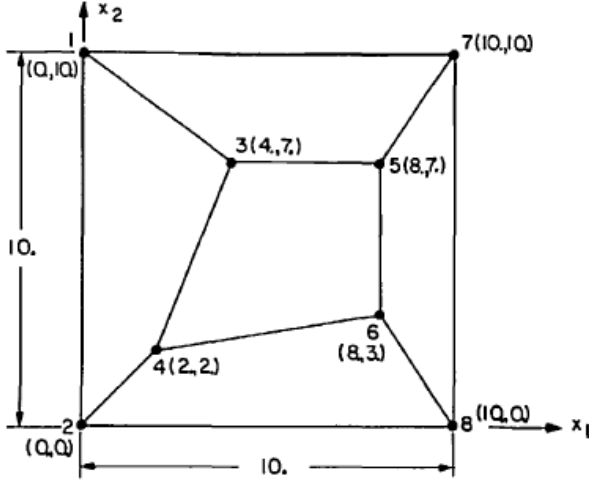
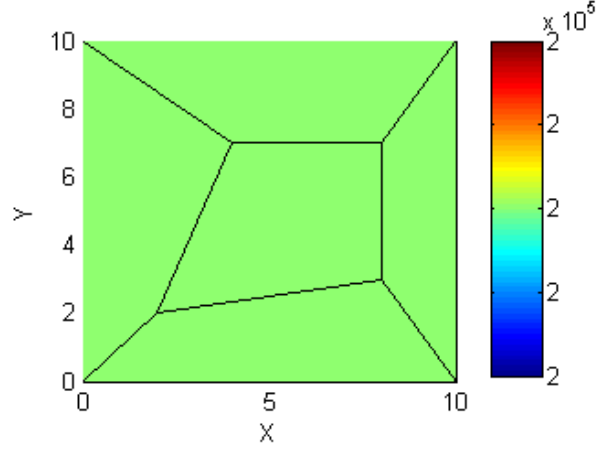
$$\text{Error} = \left( \frac{W_{MEF} - W_{AN}}{W_{AN}} \right) \times 100 \% \quad (2.62)$$

donde  $W_{MEF}$  es la solución de un caso de prueba obtenida con el código escrito en esta tesis usando el Método de Elementos Finitos y  $W_{AN}$  la solución analítica correspondiente. El orden de integración numérica de todas las pruebas numéricas es de  $2 \times 2 \times 2$  (integración completa), como lo utiliza, para el caso lineal, la Referencia [19]. En las tablas, la notación N/A significa No Aplica.

### 2.6.1. Estabilidad

Para estudiar la estabilidad del MITC4 se calcularon los valores característicos de la matriz de rigidez en elementos regulares y distorsionados. En todos los casos el elemento presenta 6 autovalores iguales a cero, es decir, 6 modos de cuerpo rígido, modos que concuerdan con el dato hallado con el mismo análisis para el MITC4 en la Ref. [64] y que asegura la estabilidad del elemento.

A continuación se presentan las pruebas de convergencia denominadas *patch test* para el MITC4 de una capa. El objetivo de esta prueba es comprobar que una malla de elementos del mismo tipo (ver Fig. 2.3) puede representar cada componente de las tensiones y deformaciones de manera constante, permaneciendo todas las demás componentes iguales a cero. El *patch test* fue propuesto por Irons & Razzaque en [34]. Las constantes usadas para las pruebas son  $E=2.1e6$ ,  $\nu=0.3$  y los espesores  $th=1.0$  y  $th=0.001$ .


 Figura 2.3: Malla para *patch test* [19].

 Figura 2.4: Campo  $\tau_{xx}$ .  $th = 0,001$ , Carga=1000 N en nodos 7 y 8, respectivamente.

### 2.6.2. *Patch test* membranar para $\tau_{xx}$ y $\tau_{yy}$ constantes

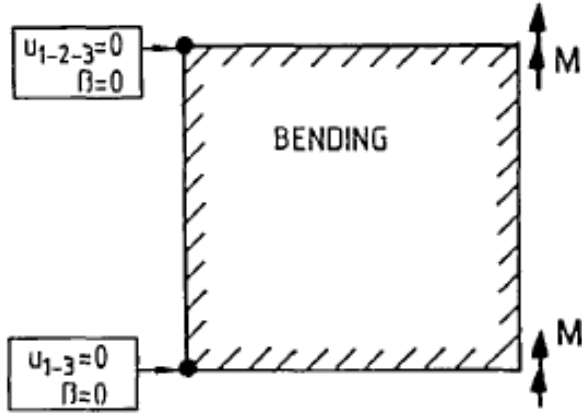
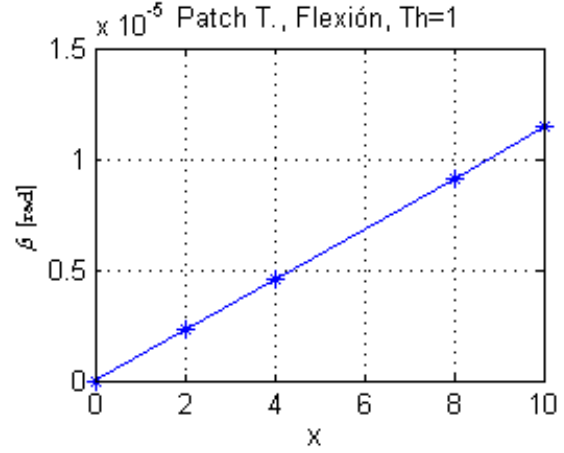
Para comprobar el campo  $\tau_{xx}$  constante dentro de todos los elementos se restringirán todos los grados de libertad en el nodo 2 y los desplazamientos  $u$  y  $w$  en el nodo 1 y se aplicará una carga de 1000 N en dirección X en los nodos 7 y 8. Para comprobar el campo  $\tau_{yy}$  se restringirán todos los grados de libertad en el nodo 2 y los desplazamientos  $v$  y  $w$  en el nodo 8, con carga aplicada de 1000 N en dirección Y a los nodos 1 y 7. Los campos de tensiones resultantes para  $th = 1$  son  $\tau_{xx} = \tau_{yy} = P/A = 200$ . Para  $th = 0,001$   $\tau_{xx} = \tau_{yy} = 2e5$ . Se concluye que el elemento pasa el *patch test* membranar. Para todos los casos el campo de tensiones tiene el aspecto que se observa en la Fig. 2.4.

### 2.6.3. *Patch test* de corte en plano para $\tau_{xy}$ constante

Se restringirán  $u$  y  $w$  en todos los nodos y, adicionalmente,  $v$  en los nodos 1 y 2. Se aplicará una carga de 1000 N en dirección Y en los nodos 7 y 8. El campo de tensiones resultante para  $th = 1$  es  $\tau_{xy} = V/A = 200$ . Para  $th = 0,001$   $\tau_{xx} = \tau_{yy} = 2e5$ . Se concluye que el elemento pasa el *patch test* para corte en el plano. El elemento también pasa la prueba de corte para  $\tau_{yx}$ , con restricciones en los nodos 2 y 8 y cargas en 1 y 7 en dirección X.

### 2.6.4. *Patch test* de flexión para $\tau_{xx}$ y $\tau_{yy}$ constantes

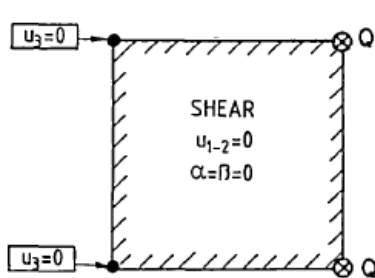
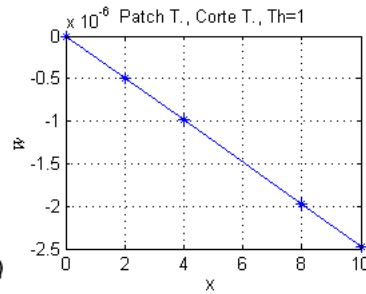
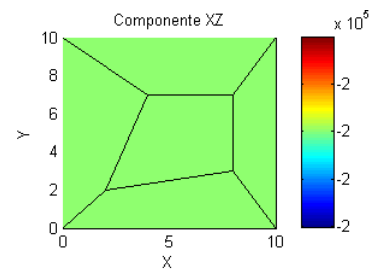
Para comprobar  $\tau_{xx}$  constante se aplicarán las restricciones y momentos observados en la Fig. 2.5. El momento aplicado a cada nodo es  $M = 1000$  N.m.


 Figura 2.5: *patch test* de flexión [19].

 Figura 2.6: Rotaciones alrededor de Y.  $M_{nodo} = 1$ .

El campo resultante para  $th = 1$  es  $\tau_{xx} = Mz/I = 692.8203$ . Para  $th = 0,001$   $\tau_{xx} = 6.9282e8$ . Mismos resultados para  $\tau_{yy}$ . Los números fueron comparados con la misma simulación realizada en ADINA, obteniéndose los mismos resultados. Se obtuvo una distribución lineal de las rotaciones en ambas direcciones (ver Fig. 2.6.) y las deflexiones máximas son iguales a  $\delta_{max} = -Ml^2/2EI$ . Más detalles de esta última comprobación se pueden encontrar en el Anexo B.

### 2.6.5. *Patch test* de corte transversal para $\tau_{yz}$ y $\tau_{xz}$ constantes

Para esta prueba todos los grados de libertad se hacen cero a excepción de los desplazamientos  $w$ , los cuales son cero sólo para los nodos 1 y 2 (ver Fig. 2.7). La malla se somete a una carga transversal de 1000 N en dirección -Z en los nodos 7 y 8.


 Figura 2.7: *patch test* de corte transversal [19].

 Figura 2.8: Rotaciones nodales.  $Q=-1$  en nodos 7 y 8.

 Figura 2.9: Campo  $\tau_{xz}$  cte.

Se obtuvo una distribución lineal de los desplazamientos transversales (ver Fig. 2.8 y Anexo B) y un campo  $\tau_{xz} = V/A$  constante en todos los puntos interiores de la malla de elementos. Para  $h = 1$ ,  $\tau_{xz} = -200$ , y para  $h = 0.001$ ,  $\tau_{xz} = -2e5$  (Ver Fig. 2.9).

Las mismas pruebas se realizaron para hallar el campo  $\tau_{yz}$ , obteniéndose los mismos resultados. Resultados adicionales de esta prueba pueden hallarse en el Anexo B.

### 2.6.6. *Patch test* de Giro con $\tau_{xy}$ constante

Se aplica la carga  $P = -1000$  en Z a la malla en el nodo 7 y las condiciones de borde observadas en la Figura 2.10. Para una placa delgada se deben obtener curvaturas constantes en ambas direcciones de la placa y los desplazamientos transversales deben coincidir con la solución analítica de placa delgada. Para una placa gruesa se debe obtener una ligera asimetría en la solución de los desplazamientos (el tercer dígito) debido a la representación asimétrica de las deformaciones de corte transversales. Esta asimetría no debería observarse si se suprimen las deformaciones por corte escogiendo un valor grande para el factor de corrección de corte (que corresponde a la teoría de placas delgadas) o cuando se usan elementos rectangulares en la malla [9].

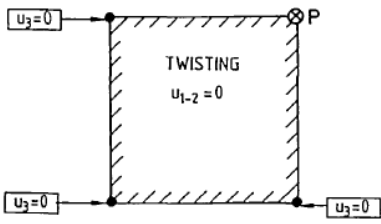


Figura 2.10: *patch test* de giro [19].

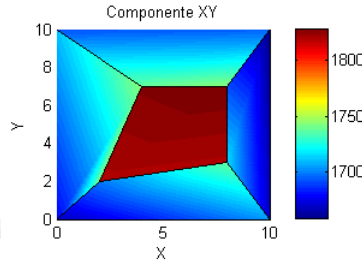


Figura 2.11: Matlab,  $\tau_{xy}$ ,  $th = 1$ .

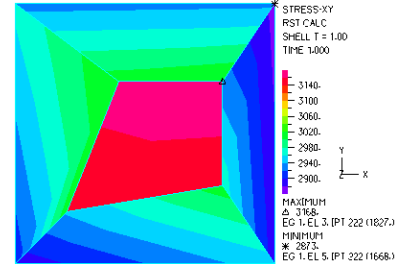


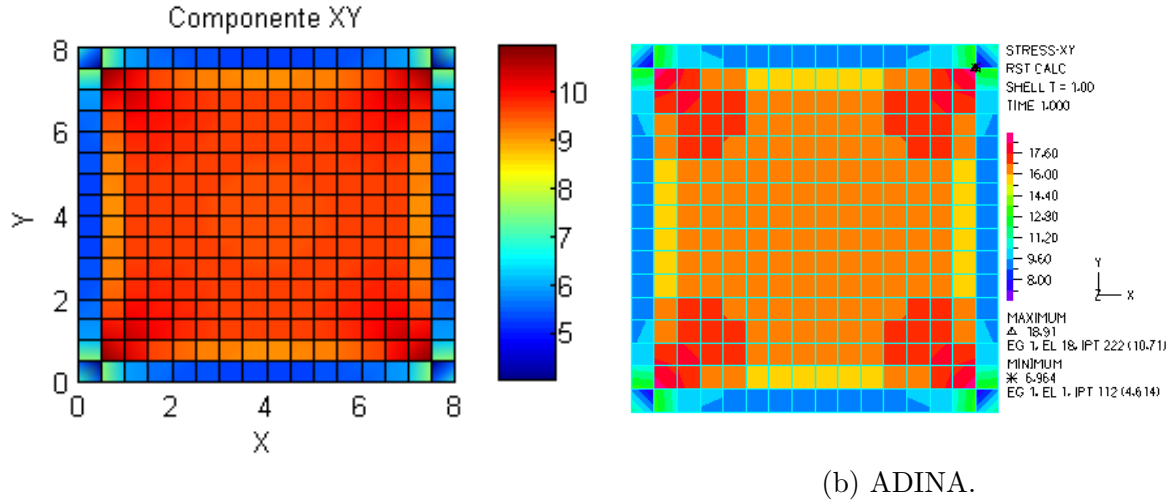
Figura 2.12: ADINA,  $\tau_{xy}$ ,  $th = 1$ .

Para demostrar el funcionamiento del elemento nos apoyamos en la teoría elástica de placas delgadas para pequeñas deformaciones (teoría de Kirchhoff-Love). Podemos decir que la curvatura  $\kappa_{xy}$  está en relación directa con la deformación de corte en el plano  $\gamma_{xy}$ , mediante la relación  $\gamma_{xy} = z\kappa_{xy}$ .

Para la malla de espesor  $th = 1$  se obtuvo una asimetría en las rotaciones a partir de la tercera cifra significativa (rotación  $\alpha$  debería ser igual para nodos 5 y 6, 7 y 8;  $\beta$  debería ser igual para nodos 1 y 7, 3 y 5;  $\alpha$  y  $\beta$  deberían ser iguales para nodo 4).  $\gamma_{xy}$  y  $\tau_{xy}$  presentaron variaciones a partir de la segunda cifra significativa, sin embargo, los resultados numéricos son iguales a los hallados con ADINA (ver Figs. 2.11 y 2.12). Para malla con  $th = 0.001$  se obtuvieron asimetrías en las rotaciones a partir de la novena cifra significativa. Los valores numéricos de los campos  $\gamma_{xy} = -2,1444e3$  y  $\tau_{xy} = -1,7321e9$

resultaron aproximadamente constantes, presentando variaciones a partir de la octava cifra significativa. ADINA arroja los mismos valores para  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$  y  $\tau_{xz}$  (para al menos 6 cifras significativas que muestra ADINA) y valores ligeramente diferentes para  $\tau_{xx}$  y  $\tau_{yy}$ .

Existe una solución analítica cuya deflexión bajo la carga es 0.2496 in. para  $E = 1e4$  psi,  $\nu = 0,3$ , lado=8 in, espesor=1 in, carga=5 lb. No fue posible lograr el campo  $\gamma_{xy}$  constante, y el valor de deflexión bajo la carga obtenido con Matlab y con ADINA fue -0.288545 in. El campo de tensiones  $\tau_{xy}$  obtenido con Matlab y con ADINA también es numéricamente igual en todos los puntos de Gauss, y se muestra en las Figs. 2.13a y 2.13b.



(a) Matlab.

(b) ADINA.

Figura 2.13: Tensiones  $\tau_{xy}$  para malla de 16 x 16.

### 2.6.7. Vigas en voladizo y placa simplemente apoyada

Se adoptaron otros casos de prueba para el elemento MITC4 isótropo de 1 capa, los cuales se encuentran sugeridos en el artículo original que presenta la formulación del elemento (para más detalles ver Ref. [19]). Los casos trabajados fueron:

- Viga isótropa en voladizo con momento flector en un extremo. 1 elemento.  $L/h=100$  y  $L/h=1000$ .
- Viga isótropa en voladizo con momento flector en un extremo. 1x2 elementos distorsionados.  $L/h=100$  y  $L/h=1000$ .
- Viga isótropa en voladizo con fuerza transversal en un extremo. 1 elemento.  $L/h=100$ .

- Viga isótropa en voladizo con fuerza transversal en un extremo. 1x4 elementos rectangulares.  $L/h=5$  y  $L/h=100$ .
- Viga isótropa en voladizo con fuerza transversal en un extremo. 1x4 elementos distorsionados.  $L/h=5$  y  $L/h=100$ .
- Placa cuadrada isótropa simplemente apoyada con carga de presión uniforme. 4x4 elementos rectangulares y 4x4 elementos distorsionados.

Con el objetivo de disponer de abundantes datos para realizar la depuración de errores se elaboraron las mismas simulaciones en el software ADINA. Se compararon los campos de desplazamientos nodales, obteniéndose resultados satisfactorios.

A partir de este punto del capítulo se utilizan los Factores de Corrección en los casos de prueba, los cuales son calculados a partir de la formulación desarrollada en la Sección 3.5.2. Este cálculo resulta siempre en valores de SCF para cáscaras isótropas y homogéneas  $\kappa = 5/6$ .

### 2.6.8. Scordelis-Lo roof

Este caso fue propuesto por Scordelis y Lo en la referencia [56] y es usado con frecuencia para evaluar el desempeño de elementos de cáscara. Consiste en aplicar cargas gravitacionales sobre un techo cilíndrico soportado sobre diafragmas en los extremos y libre sobre los bordes longitudinales. Debido a la simetría, es posible analizar sólo un cuarto del techo cilíndrico, que corresponde a la sección sombreada de la Fig. 2.14.

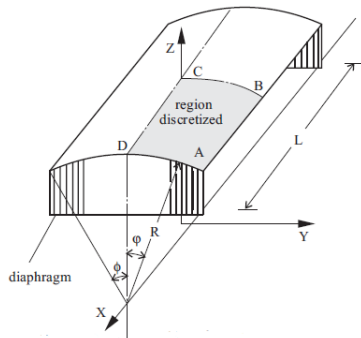


Figura 2.14: Techo con carga de gravedad.

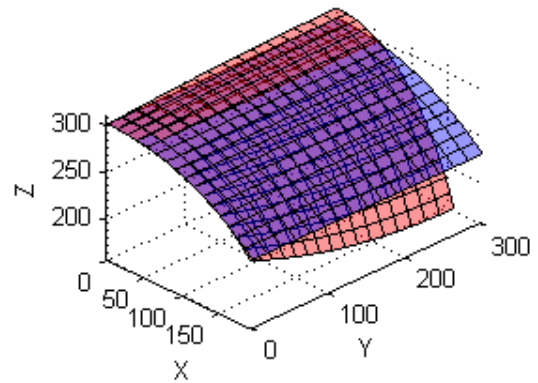


Figura 2.15: Desplazamientos con malla de 16x16.

Los datos del problema son:  $R=300$  in,  $L=600$  in,  $h=3.0$  in,  $\phi = 40^\circ$ ,  $W = 90$  lb/ft<sup>2</sup>=0.625 lb/in<sup>2</sup>,  $E=3e6$  psi,  $\nu =0.0$ . Cond. borde: sobre DA,  $U_y = U_z = 0,0$  (diagrama), Sobre BC,  $U_x = \theta_y = \theta_z = 0$  (simetría), sobre CD,  $U_y = \theta_x = \theta_z = 0$  (simetría). La solución analítica dada por la referencia [56] para el desplazamiento en el centro de un borde libre (punto B en la Figura 2.14) es -3.703 in, aunque algunos autores usan -3.696 in. Una solución analítica exacta (deep shell) es -3.53 in [3]. La solución de referencia para esta tesis será la misma usada por Dvorkin & Bathe en la Ref. [19] y por Vampa en la Ref. [64]. Los resultados pueden apreciarse en la Fig. 2.15 y en la Tabla 2.1.

Referencia	Sol. SCF=1	Sol. SCF=5/6	FEM SCF/Ana.	Error %
Refs. [19], [64]	-3.6 in	N/A	N/A	N/A
Esta tesis 5x5	-3.4607 in	-3.4609 in	0.9614	-3.8639
Esta tesis 8x8	-3.5333 in	-3.5336 in	0.9816	-1.8444
Esta tesis 12x12	-3.5730 in	-3.5735 in	0.9926	-0.7361
Esta tesis 16x16	-3.5898 in	-3.5894 in	0.9971	-0.2944

Tabla 2.1: Soluciones del problema del techo cilíndrico. SCF  $\kappa_{23} = \kappa_{13} = 5/6 = 0,8333$ .

En la Fig. 2.16 se aprecian resultados de convergencia para mallas uniformes de 5x5, 8x8 y 12x12 elementos MITC4 tomada del artículo original de Dvorkin & Bathe [19].

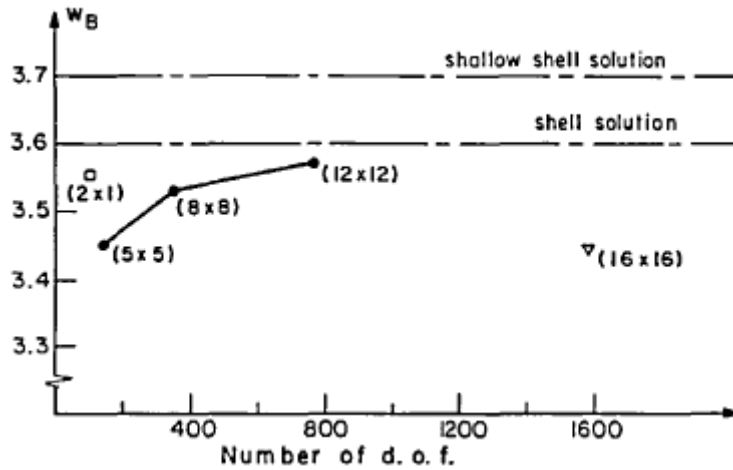


Figura 2.16: Convergencia de desplazamientos en el punto B para caso de prueba Scordelis-Lo. Tomada de [19].

### 2.6.9. Cilindro pinchado

Este problema busca evaluar los comportamientos membranal y de flexión del elemento cuando es aplicado a una estructura curva. Consiste en un cilindro delgado analizado estáticamente, con soporte tipo diafragma en sus extremos y cargado con dos fuerzas concentradas verticales diametralmente opuestas aplicadas en el centro. La solución teórica para el desplazamiento vertical en el punto de aplicación de la carga se puede hallar en las referencias [59] y [24],

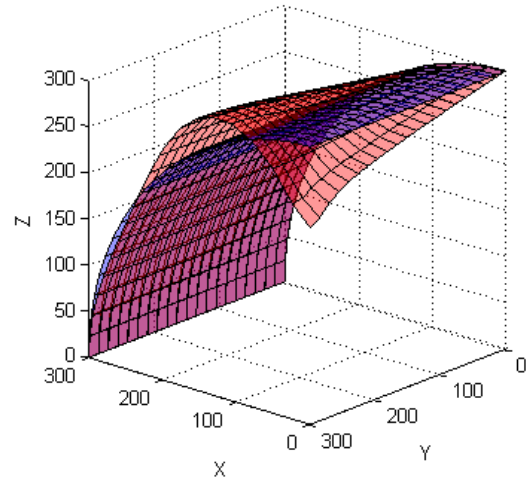
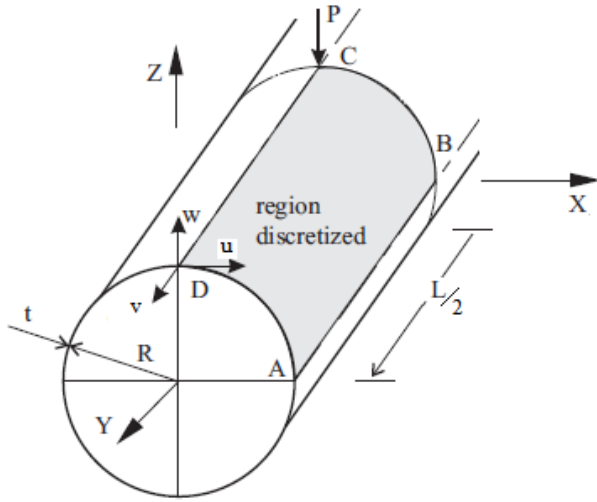


Figura 2.17: Problema de Cilindro Pinchado con diafragma. Tomado de [3].

Figura 2.18: Desplazamientos con malla de 20x20 aumentados  $5 \times 10^6$  veces.

Sólo se modela 1/8 parte de la estructura debido a la simetría. Los datos del problema son:  $R=300$  in,  $L=600$  in,  $t=3.0$  in,  $P=1$  lb (0.25 lb si tenemos en cuenta la simetría). Las propiedades del material son:  $E=3.0 \times 10^6$  psi,  $\nu=0.3$ . Cond. borde: sobre DC:  $U_x = R_y = R_z = 0$ . Sobre CB:  $U_y = R_x = R_z = 0$ . Sobre AB:  $U_z = R_x = R_y = 0$ . Sobre DA:  $U_x = U_z = R_y = 0$  (diafragma). Las soluciones para la deflexión radial en el punto de aplicación de la carga se presentan en la Tabla 2.2, mientras que la impresión de la solución para los desplazamientos nodales se puede ver en la Figura 2.18. Los datos entre paréntesis corresponden a la solución presentada por Dvorkin & Bathe en la Ref. [19] usando elementos MITC4.



Referencia	Sol. SCF=1	Sol. SCF=5/6	FEM SCF/Ana.	Error %
Analítica Ref. [59], [24]	-1.8248e-5 in	N/A	N/A	N/A
Esta tesis 5x5	-9.3452e-6 in	-9.3554e-6 in	0.5127 (0.51)	-48.7319
Esta tesis 10x10	-1.5072e-5 in	-1.5088e-5 in	0.8268 (0.83)	-17.3170
Esta tesis 20x20	-1.7436e-5 in	-1.7461e-5 in	0.9569 (0.96)	-4.3128

Tabla 2.2: Solución de problema del cilindro pinchado con diafragma. SCF  $\kappa_{23} = \kappa_{13} = 5/6$ .

### 2.6.10. Frecuencia fundamental de placa delgada simplemente apoyada

Se tiene una placa cuadrada de una capa, simplemente apoyada en los cuatro bordes (ver Fig. 2.19). Los datos de la placa son:  $E=2e11$  N/m<sup>2</sup>,  $\nu=0.3$ ,  $a=2$  m,  $h=0.01$  m,  $\rho=7850$  kg/m<sup>3</sup>. La razón lado/espesor  $a/h=200$ . Se modela la placa completa, sin usar condiciones de simetría. El primer modo calculado con el código escrito en esta tesis se presenta en la Fig. 2.20 y los resultados de la frecuencia fundamental en la Tabla 2.3.

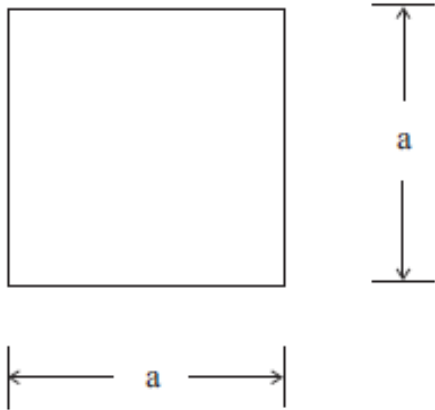


Figura 2.19: Placa simplemente apoyada.

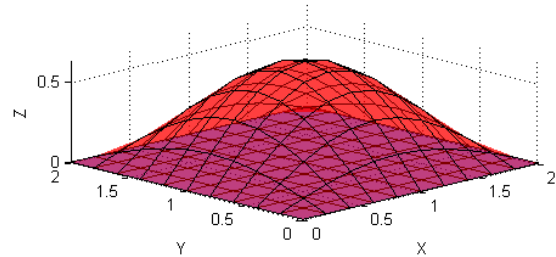


Figura 2.20: Modo 1, 11.93 Hz.

La primera frecuencia natural de una placa simplemente apoyada está dada por la referencia [11] pág. 258, como:

$$f_1 = \frac{\pi}{a^2} \sqrt{\frac{Eh^3}{12\rho h(1-\nu^2)}} \quad (2.63)$$

Modelo	Sol. SCF=1	Sol. SCF=5/6	FEM SCF/AN	Error %
Analítica Ref. [11]	12 Hz	N/A	N/A	N/A
Esta tesis (5x5)	11.7432	11.7430	0.9786	-2.1417
Esta tesis (10x10)	11.9308	11.9307	0.9942	-0.5775
Esta tesis (16x16)	11.9702	11.9701	0.9975	-0.2492

Tabla 2.3: Frecuencia fundamental de placa simplemente apoyada. Matriz de masa diagonalizada. SCF  $\kappa_{23} = \kappa_{13} = 5/6$ .

### 2.6.11. Frecuencias naturales de placa gruesa simplemente apoyada

Este caso de prueba consiste en una placa cuadrada de una capa con dimensiones de 10 m x 10 m y espesor de  $a = 1.0$  m. La razón lado/espesor  $L/h = 10$ . Las propiedades del material son: módulo elástico  $E = 2e11$  N/m<sup>2</sup>, densidad  $\rho = 8000$  kg/m<sup>3</sup>, coeficiente de Poisson  $\nu = 0.3$ . Las restricciones son:  $U_x = U_y = Rz = 0$  en todos los nodos,  $U_z = 0$  a lo largo de todos los bordes,  $R_x = 0$  a lo largo de los bordes  $x = 0$  y  $x = 10$  m,  $R_y = 0$  a lo largo de los bordes  $y = 0$  y  $y = 10$  m. Los resultados para las primeras seis frecuencias naturales y sus modos asociados se pueden observar en la Tabla 2.4.

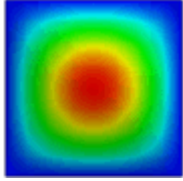
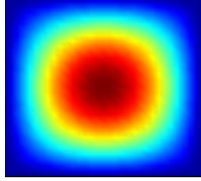
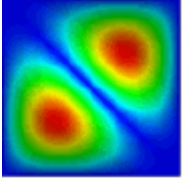
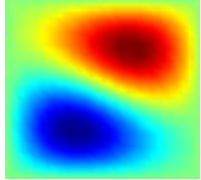
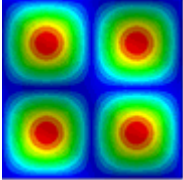
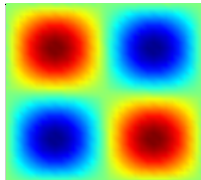
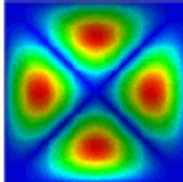
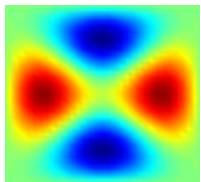
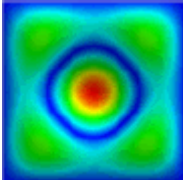
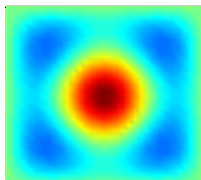
Frec.	Ref. [1] (Hz)	Modos [16]	Ref.	Sol. SCF=1 (err. %)	Sol.SCF=5/6 (err. %)	Modos Tesis
1	45.90			46.01 (0.24)	45.81 (-0.19)	
2 y 3	109.44			110.41 (0.88)	109.32 (-0.15)	
4	167.89			168.69 (0.47)	166.26 (-0.97)	
5	204.51			208.48 (1.94)	204.87 (0.17)	
6	204.51			208.48 (1.94)	204.87 (0.17)	

Tabla 2.4: Frecuencias naturales (Hz) y modos de vibración de placa gruesa simplemente apoyada. Matriz de masa diagonalizada. Soluciones de la tesis con malla de 16x16 elementos. SCF  $\kappa_{23} = \kappa_{13} = 5/6$ .

Los resultados presentados en este capítulo corresponden a elementos isótropos de una capa, donde el modelo de elementos finitos no parece ser especialmente sensible al uso de los SCF. Por otro lado, las soluciones de frecuencias naturales para los modos 5 y 6 de la placa gruesa muestran que los SCF parecen cobrar importancia con el aumento de la frecuencia. Se ha comprobado que los SCF son importantes en el análisis de placas y cáscaras gruesas y de compuestos laminares cuyas capas intermedias poseen rigideces al corte transversal mucho menores en comparación con las rigideces de otras capas del compuesto en modelos que asumen deformaciones constantes a través del espesor (teoría de Mindlin-Reissner, también llamada teoría de deformación de primer orden). A medida

que la razón  $L/h$  decrece la influencia del SCF  $\kappa$  aumenta debido a que la energía de deformación por corte se torna importante en comparación con la energía por flexión. Por otro lado, también está documentado que el efecto de  $\kappa$  aumenta con la frecuencia natural [61].

## Capítulo 3

# Elemento de cáscara para materiales compuestos

El elemento de cáscara para materiales compuestos que se estudiará en este capítulo se formula de manera similar al elemento MITC4 de una capa. A continuación se mencionan algunas de sus características:

- El espesor total de la cáscara se puede definir con un número arbitrario de capas, donde cada capa puede tener espesores nodales diferentes.
- A cada capa de material se le puede asignar un modelo de material distinto. En esta tesis el material puede ser elástico lineal isótropo u ortótropo.
- Las capas se enumeran en orden secuencial. En esta tesis se inicia con el número 1 en la parte inferior de la cáscara.
- El espesor de las capas se asigna definiendo el espesor total del elemento y el porcentaje de espesor para cada capa.

### 3.1. Coordenadas naturales reducidas

La matriz de elasticidad de un compuesto laminado puede ser diferente de una capa a otra y no es una función continua de la coordenada natural  $t$ . La integración numérica de las matrices de masa y rigidez se realiza usando coordenadas naturales reducidas a través del espesor del elemento integrando cada capa (desde  $i = 1$  hasta  $i = n$ ) individualmente,

manteniendo los límites de integración desde -1 hasta 1 (ver Figuras 3.1 y 3.2). Esto se realiza modificando la variable  $t$  a  $t^n$ . De este modo, en cada capa,  $t^n$  varía desde -1 hasta 1. La integración completa por cuadratura de Gauss de 2x2x2 se realiza como es habitual. El cambio de variable se obtiene de [25, 49],

$$t = -1 + \frac{1}{a} \left[ 2 \left( \sum_{i=1}^n l^i \right) - l^n (1 - t^n) \right] \quad (3.1)$$

Derivando la Ec. 3.1 obtenemos la siguiente expresión del diferencial  $dt$  para el cambio de variable,

$$dt = dt^n \frac{l^n}{a} \quad (3.2)$$

Donde  $t$  es la coordenada natural del elemento a través del espesor,  $t^n$  la coordenada natural de la capa  $n$  a través del espesor,  $l^i(r, s)$  el espesor de la capa  $i$  y  $a(r, s)$  el espesor total del elemento. Las expresiones para  $a$  y  $l^i$ , que son función de las coordenadas naturales  $r$  y  $s$ , son [49],

$$a(r, s) = \sum_{k=1}^4 h_k a_k \quad l^i(r, s) = \sum_{k=1}^4 h_k l_k^i \quad (3.3)$$

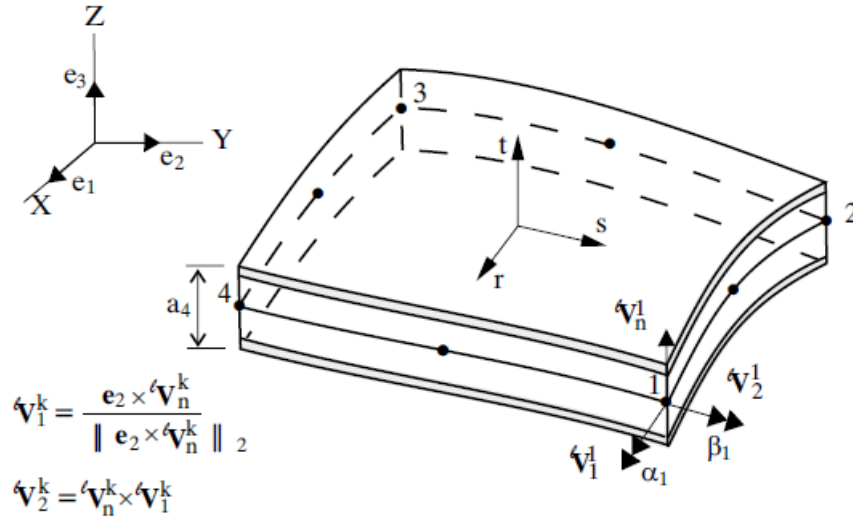


Figura 3.1: Esquema ilustrativo de algunas variables del elemento MITC4 de varias capas [2].

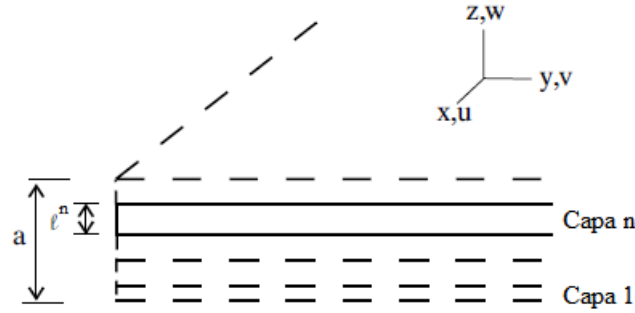


Figura 3.2: Ilustración del orden de las capas y los espesores  $a(r, s)$  y  $l^i(r, s)$  [2].

La geometría de la capa  $n$  está dada por [25]:

$${}^l x_i = \sum_{k=1}^N h_k {}^l x_i^k + \sum_{k=1}^N \left[ m_k^n + t^n \frac{l_k^n}{2} \right] h_k {}^l V_{ni}^k \quad (3.4)$$

Donde,  ${}^l x_i$  son coordenadas de un punto dentro de la capa  $n$ ,  $N$  el número de nodos,  $h_k$  las funciones de interpolación,  ${}^l x_i^k$  las coordenadas cartesianas del nodo  $k$ ,  ${}^t V_{ni}^k$ : componentes del vector normal  ${}^t V_n^k$ ,  $a_k$  el espesor total del elemento en el nodo  $k$ ,  $l_k^i$  el espesor de la capa  $i$  en el nodo  $k$ ,  $l_{[1]} = 0$  en la configuración inicial, 1 en la configuración deformada,  $m_k^n$  la distancia entre la superficie media del elemento y la superficie media de la capa  $n$  en el nodo  $k$ .

$$m_k^n = -\frac{a_k}{2} + \sum_{i=1}^n l_k^i - \frac{l_k^n}{2} \quad (3.5)$$

Los desplazamientos en la capa  $n$  serían entonces:

$$u_i = \sum_{k=1}^N h_k u_i^k + \sum_{k=1}^N \left( m_k^n + \frac{t^n l_k^n}{2} \right) (-{}^0V_{2i}^k \alpha_k + {}^0V_{1i}^k \beta_k) \quad (3.6)$$

Donde  $u_i^k$  son las componentes de los desplazamientos nodales en el nodo  $k$ , y  $\alpha_k$  y  $\beta_k$  las rotaciones de  ${}^0V_n^k$  alrededor de  ${}^0V_1^k$  y  ${}^0V_2^k$ . Usando las expresiones para las coordenadas y los desplazamientos definidos en las ecuaciones 3.4 y 3.6 se pueden evaluar las contribuciones de cada capa a las matrices de rigidez y masa del elemento [2].

## 3.2. Modelo de material ortótropo

En esta sección se describe la formulación empleada para modelar capas laminares de material ortótropo que cumplen, al igual que el modelo isótropo descrito en la sección 2.1.1, con la condición  $\tau_{33} = 0$ . Consideremos una geometría con forma de cáscara de material compuesto formada por varias capas laminadas, donde las capas pueden tener diferente espesor y material, con ejes de ortotropía ortonormales (ejes del material)  $\underline{1}$ ,  $\underline{2}$ ,  $\underline{3}$  y donde  $\underline{3} = \hat{e}_3$  (ver Fig. 3.3).



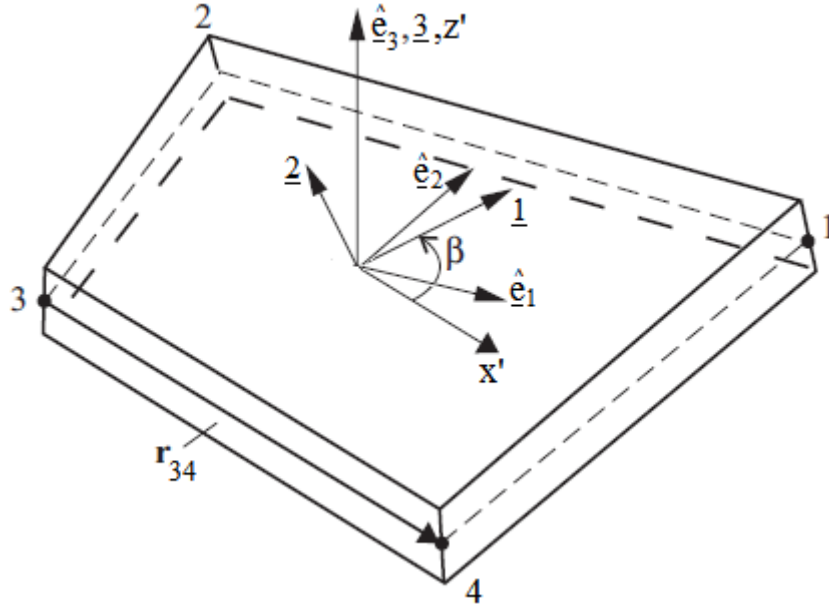


Figura 3.3: Definición de ejes de ortotropía  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y vectores locales de referencia en un punto del elemento.

La relación constitutiva en un punto del elemento se puede escribir con referencia a los ejes de ortotropía  $\underline{1}$ ,  $\underline{2}$ ,  $\underline{3}$  como [47],

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & 0 & 0 & 0 \\ R_{12} & R_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Siendo,

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{E_1}{D} & R_{22} &= \frac{E_2}{D} & R_{12} &= \frac{\nu_{12}E_1}{D} = \frac{\nu_{21}E_2}{D} \\ R_{44} &= G_{12} & R_{55} &= \kappa_{23}G_{23} & R_{66} &= \kappa_{13}G_{13} & D &= 1 - \nu_{12}\nu_{21} \end{aligned}$$

Donde  $\kappa_{23}$  y  $\kappa_{13}$  son los Factores de Corrección de la energía de corte transversal. Para hallar la matriz de rigidez de un elemento y determinar por completo un estado de tensiones se necesitan seis constantes:  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\nu_{12}$ ,  $G_{12}$ ,  $G_{23}$  y  $G_{13}$ . Para determinar por completo un estado de deformaciones se requieren las demás constantes:  $E_3$ ,  $\nu_{23}$  y  $\nu_{13}$ .

Para futuras referencias, la relación constitutiva ortótropa de la Ec. 3.7 en el sistema de coordenadas alineado con los ejes de ortotropía la escribiremos como,

$$\underline{\tau}_I = \underline{\underline{C}}_I \cdot \underline{\varepsilon}_I \quad (3.8)$$

### 3.2.1. Orientación del material de las capas

Para orientar el material de cada capa del elemento se debe primero definir un sistema cartesiano local de referencia (ver Fig. 3.3),

$$\underline{x}' = \frac{\underline{r}_{34} - (\underline{r}_{34} \cdot \hat{\underline{e}}_3) \hat{\underline{e}}_3}{|\underline{r}_{34} - (\underline{r}_{34} \cdot \hat{\underline{e}}_3) \hat{\underline{e}}_3|} \quad \underline{y}' = \hat{\underline{e}}_3 \times \underline{x}' \quad \underline{z}' = \hat{\underline{e}}_3 \quad \underline{r}_{34} = \underline{r}_4 - \underline{r}_3 \quad (3.9)$$

donde el vector base  $\underline{x}'$  es la proyección unitaria de un vector  $\underline{r}_{34}$  sobre el plano definido por  $\hat{\underline{e}}_1$  y  $\hat{\underline{e}}_2$ ,  $\underline{y}'$  es un vector contenido en el mismo plano y perpendicular a  $\underline{x}'$  y  $\underline{r}_{34}$  es un vector que define la dirección de referencia para orientar el material de cada capa. Si la malla no está distorsionada y todos los elementos son rectangulares  $\underline{r}_3$  y  $\underline{r}_4$  pueden tomarse como los vectores posición de los nodos 3 y 4 de cada elemento, de lo contrario, estos deben ser definidos por el usuario.

Para definir la orientación de los ejes de ortotropía  $\underline{1}$  y  $\underline{2}$  del material de cada capa y en cada punto de Gauss con respecto a los vectores  $\underline{x}'$  y  $\underline{y}'$  es necesario definir un ángulo  $\beta$  para cada capa (ver Fig. 3.3). La orientación de los ejes de ortotropía puede determinarse como,

$$\underline{1} = \cos(\beta) \underline{x}' + \sin(\beta) \underline{y}' \quad \underline{2} = \hat{\underline{e}}_3 \times \underline{1} \quad (3.10)$$

Para ilustrar esta funcionalidad se solucionó el caso de prueba propuesto por Noor & Mathers en la Ref. [46]. Se trata de una placa cuadrada de material ortótropo de 1 x 1 x 0.01 in sometida a una carga de presión uniforme de 1 psi, cuyo material se encuentra orientado un ángulo  $\beta = 45^\circ$  y con todos los grados de libertad restringidos sobre los bordes (ver más detalles en la Sección 3.6.2). En la Fig. 3.4 se observan los ejes de ortotropía del material  $\underline{1}$  (verde) y  $\underline{2}$  (rojo) en cada punto de Gauss, cuya dirección es función de la dirección (1,0,0), predefinida en la entrada de datos.

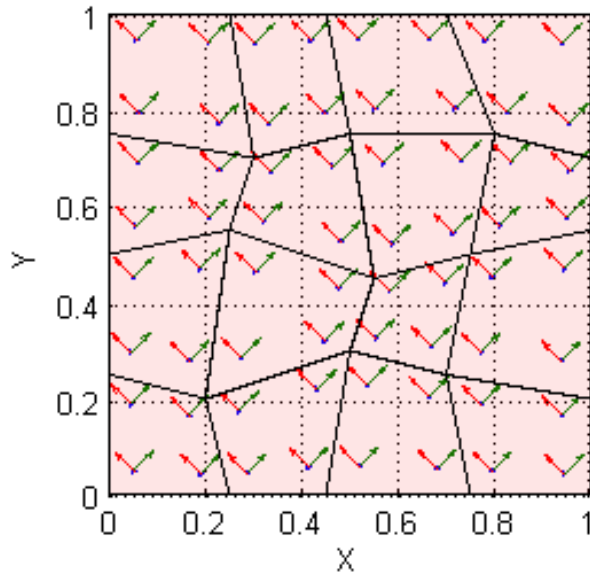


Figura 3.4: Definición de ejes de ortotropía del material ( $\underline{1}$  y  $\underline{2}$ ) para una malla distorsionada.

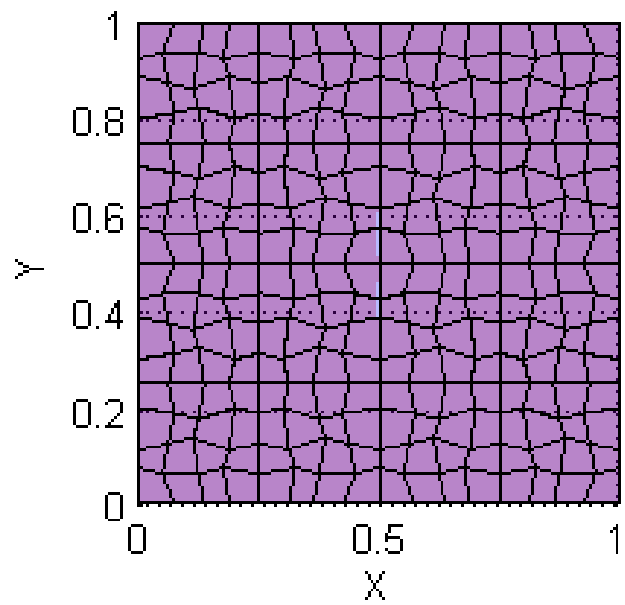


Figura 3.5: Malla distorsionada de 16 x 16 elementos.

Las Figuras 3.6 y 3.7 muestran el campo de desplazamientos de la placa ortótropa para orientaciones del material de 0 y 45 grados para la malla mostrada en la Fig. 3.5.

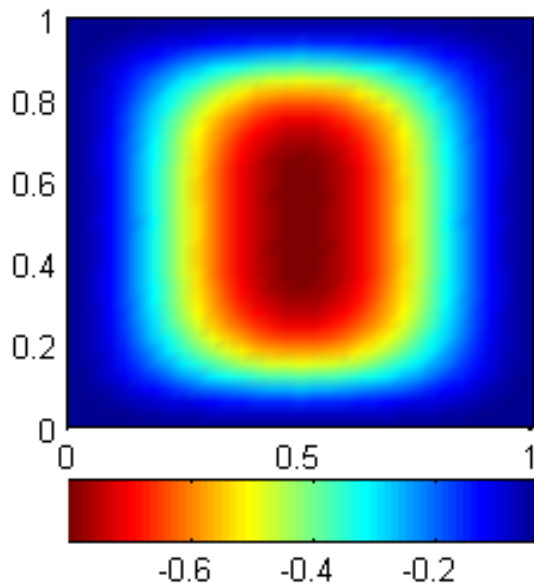


Figura 3.6: Campo solución de desplazamientos para malla de 16x16.  $\beta = 0$ .

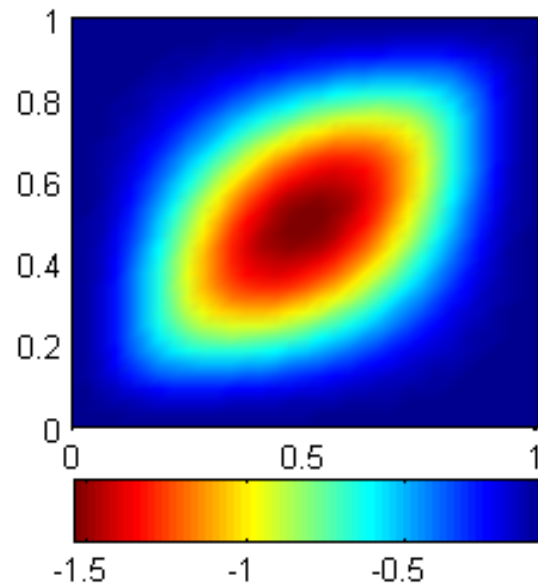


Figura 3.7: Campo solución de desplazamientos para malla de 16x16.  $\beta = 45$ .

Los resultados para el desplazamiento en el centro usando una malla de elementos distorsionada se hallan tabulados para diferentes tamaños en la Tabla 3.1.

Referencia	Sol. SCF=1	Sol. SCF=5/6	FEM SCF/Ana.	Error %
Analítica Ref. [46], 45°	-1.6311	N/A	N/A	N/A
Esta tesis 4x4, 45°	-1.2119	-1.2182	0.7469	-25.31
Esta tesis 8x8, 45°	-1.5606	-1.5684	0.9616	-3.84
Esta tesis 16x16, 45°	-1.6138	-1.6203	0.9934	-0.66

Tabla 3.1: Soluciones del problema de Placa ortótropa de 1 capa orientada 45° con malla distorsionada. SCF  $\kappa = 5/6$ .

### 3.2.2. Convención para coeficientes de Poisson

Para el análisis de materiales ortótropos existen dos convenciones posibles empleadas para los coeficientes de Poisson. Estas son:

$$\varepsilon_2 = -\frac{\nu_{21}}{E_1}\tau_1, \quad \frac{\nu_{21}}{E_1} = \frac{\nu_{12}}{E_2} \quad (3.11)$$

y

$$\varepsilon_2 = -\frac{\nu_{12}}{E_1}\tau_1, \quad \frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1} \quad (3.12)$$

En estas fórmulas,  $\varepsilon_2$  es la deformación en la dirección  $\underline{2}$  debida a una tensión uniaxial  $\tau_1$ . Para este trabajo, se usará la convención de la Ecuación 3.11, la cual define el coeficiente de Poisson como,

$$\nu_{ij} = -\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_j} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (3.13)$$

La convención de la Ecuación 3.12 está dada por Jones en la Referencia [36], la cual define el mismo coeficiente como,

$$^J\nu_{ij} = -\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i} \quad (3.14)$$

En general, las fuentes no especifican cuál convención utilizan, pero si se asume la convención de la Ecuación 3.11 y se halla que la matriz constitutiva no está definida positiva (no es invertible), entonces podemos asumir que la referencia está empleando la convención de Jones.

Después del trabajo de Lempriere de la Referencia [40] se identificaron las restricciones que poseen las constantes ortótropas, las cuales son de carácter termodinámico. Estas restricciones son:

$$|\nu_{ji}| < \left( \frac{E_i}{E_j} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.15)$$

$$\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31} < 0,5 \left( 1 - \nu_{12}^2 \frac{E_1}{E_2} - \nu_{23}^2 \frac{E_2}{E_3} - \nu_{31}^2 \frac{E_3}{E_1} \right) \leq 0,5 \quad (3.16)$$

$$\nu_{12}\nu_{23}\nu_{13} < 0,5 \left( 1 - \nu_{12}^2 \frac{E_1}{E_2} - \nu_{23}^2 \frac{E_2}{E_3} - \nu_{13}^2 \frac{E_1}{E_3} \right) \leq 0,5 \quad (3.17)$$

Es posible calcular el valor de  $\nu_{ji}$  dado un valor de  ${}^J\nu_{ij}$ , teniendo en cuenta que

$$\nu_{ji} = {}^J\nu_{ij} \quad (3.18)$$

luego, empleando la Ecuación 3.11:

$$\nu_{ij} = \left( \frac{E_j}{E_i} \right) {}^J\nu_{ij} \quad (3.19)$$

Cuando las constantes del material provienen de fuentes que siguen la convención de Jones para el coeficiente de Poisson se emplea la conversión de la Ecuación 3.19 para calcular los coeficientes de Poisson equivalentes, los cuales podrán ser empleados como datos de entrada para aquellos programas, como ADINA, que siguen la otra convención. Para identificar desde la formulación de la matriz constitutiva si adoptan una convención o la otra podemos tener en cuenta lo siguiente:

$$\text{Si } C_{12} = \frac{E_1\nu_{12}}{D} \rightarrow \nu_{12} = \nu_{12} \quad (3.20)$$

$$\text{Si } C_{12} = \frac{E_1\nu_{21}}{D} \rightarrow \nu_{21} = {}^J\nu_{21} \quad (3.21)$$

### 3.3. Transformación de relaciones constitutivas

El cálculo de la integral de las matrices de rigidez elementales se realizará con las matrices constitutiva y deformaciones-desplazamientos en el sistema cartesiano global. Para ello, la matriz  $\underline{\underline{C}}_I$  (ver Ecs. 3.7 y 3.8) de cada capa será rotada en el plano un ángulo  $\beta$  hasta que el sistema de ortotropía  $\underline{1}, \underline{2}, \underline{3}$  quede alineado con el sistema  $\underline{x}', \underline{y}', \underline{z}'$ , siendo  $\underline{3} = \underline{z}'$ , mediante la expresión,

$$\underline{\underline{C}}' = \underline{\underline{Q}}^T \underline{\underline{C}}_I \underline{\underline{Q}} \quad (3.22)$$

donde  $\underline{\underline{Q}}$  es la matriz de rotación (ver Ec. 2.10 y Anexo A.3), con,

$$l_1 = \underline{x}' \cdot \underline{1} \quad m_1 = \underline{x}' \cdot \underline{2} \quad n_1 = \underline{x}' \cdot \underline{3} \quad (3.23)$$

$$l_2 = \underline{y}' \cdot \underline{1} \quad m_1 = \underline{y}' \cdot \underline{2} \quad n_1 = \underline{y}' \cdot \underline{3} \quad (3.24)$$

$$l_3 = \underline{z}' \cdot \underline{1} \quad m_1 = \underline{z}' \cdot \underline{2} \quad n_1 = \underline{z}' \cdot \underline{3} \quad (3.25)$$

Una alternativa es usar la forma especializada para la rotación de  $\underline{\underline{C}}_I$  en el plano [47],

$$\underline{\underline{Q}} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs & 0 & 0 \\ s^2 & c^2 & -cs & 0 & 0 \\ -2cs & 2cs & c^2 - s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & 0 & s & c \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

donde,  $c = \cos(\beta)$  y  $s = \sin(\beta)$ . La rotación anterior se puede realizar para cada capa por fuera del ciclo de integración elemental ya que su evaluación no es función de las coordenadas de los puntos de Gauss. Una vez dentro del ciclo elemental y para cada punto de Gauss en cada capa es necesario rotar nuevamente la relación constitutiva del sistema cartesiano de referencia  $\underline{x}', \underline{y}', \underline{z}'$  al sistema cartesiano global  $i, j, k$ , mediante la transformación,

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{Q}}^T \underline{\underline{C}}' \underline{\underline{Q}} \quad (3.27)$$

donde los cosenos directores para  $\underline{\underline{Q}}$  son (ver Ec. 2.10),

$$l_1 = \underline{i} \cdot \underline{x}' \quad m_1 = \underline{i} \cdot \underline{y}' \quad n_1 = \underline{i} \cdot \underline{z}' \quad (3.28)$$

$$l_2 = \underline{j} \cdot \underline{x}' \quad m_1 = \underline{j} \cdot \underline{y}' \quad n_1 = \underline{j} \cdot \underline{z}' \quad (3.29)$$

$$l_3 = \underline{k} \cdot \underline{x}' \quad m_1 = \underline{k} \cdot \underline{y}' \quad n_1 = \underline{k} \cdot \underline{z}' \quad (3.30)$$

### 3.4. Ecuación de equilibrio y matriz de rigidez

El sistema de ecuaciones para el modelo estático lineal a resolver sigue siendo,

$$\underline{\underline{K}} \cdot \hat{\underline{U}} = \underline{R} \quad (3.31)$$

donde  $\hat{\underline{U}}$  es el vector de desplazamientos y rotaciones nodales del sistema,  $\underline{R}$  el vector de fuerzas nodales externas y  $\underline{\underline{K}}$  la matriz de rigidez de la estructura, que será calculada con referencia al sistema cartesiano global como ([47], p. 609, [29]),

$$\begin{aligned} \underline{\underline{K}}_{sist} &= \sum_{m=1}^{nele} \underline{\underline{K}}_{glob}^{(m)} = \sum_{m=1}^{nele} \int_{V^{(m)}} \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{C}} \underline{\underline{B}} dV^{(m)} \\ &= \sum_{m=1}^{nele} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{C}} \underline{\underline{B}} |\underline{J}| dr ds dt \end{aligned} \quad (3.32)$$

donde  $\underline{\underline{B}}$  y  $\underline{\underline{C}}$  son las matrices deformaciones/desplazamientos y del material evaluadas en los puntos de Gauss para cada capa en el sistema cartesiano global [38, 29]. Para integrar exactamente la matriz de rigidez se usó integración por cuadratura de Gauss de orden  $2 \times 2 \times 2$  para cada capa. Teniendo en cuenta el cambio de variable de  $t$  a  $t^n$  y la derivada  $dt$  presentadas en las Ecs. 3.1 y 3.2 y sustituyéndolas en la Ec. 3.32 obtenemos,

$$\underline{\underline{K}}_{sist} = \sum_{m=1}^{nele} \underline{\underline{K}}_{glob}^{(m)} = \sum_{m=1}^{nele} \left( \sum_{i=1}^n \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{C}} \underline{\underline{B}} |\underline{J}| dr ds dt^i \frac{l^i(r, s)}{a(r, s)} \right) \quad (3.33)$$

donde  $n$  es el número de capas del elemento y  $nele$  el número total de elementos de la malla.

### 3.5. Factores de corrección de energía de corte transversal

En el análisis de placas y cáscaras gruesas o en el análisis de estructuras de varias capas, como los paneles tipo sandwich, que tienen baja rigidez en cortante, la energía de las deformaciones de corte transversales podría no ser despreciable en comparación con la energía por flexión, lo cual aplica para materiales muy delgados. En estos casos, el cálculo de la energía de deformación por corte transversal del elemento debe modificarse mediante la introducción de factores multiplicativos que reducen la rigidez al corte transversal del material a partir de la reducción de los módulos elásticos de corte. Esto con el objetivo de lograr una mejor estimación de las deformaciones de corte transversal a través del espesor del elemento.

#### 3.5.1. El factor de corrección en vigas

Para aproximarse al estudio de los Factores de Corrección de la energía de deformación por corte se hará una corta referencia a su cálculo en vigas de sección transversal rectangular. La suposición cinemática básica en el análisis de flexión de vigas sin incluir deformaciones por corte es que el plano o la línea normal a la superficie media (eje neutro) permanecen rectos durante las deformaciones y que su rotación angular es igual a la pendiente de la superficie media de la viga (teoría de vigas de Bernoulli), donde el desplazamiento  $w$  es la única variable. La rotación total de la sección es, entonces,

$$\beta_{\text{Bernoulli}} = \frac{dw}{dx} \quad (3.34)$$

Si se considera ahora la flexión de una viga que tenga en cuenta el efecto de las deformaciones cortantes se mantiene la suposición que una línea o sección que originalmente era normal al plano medio permanece plana después de las deformaciones, pero por causa del efecto de las deformaciones por corte dicha línea o sección no permanece normal al plano medio, y su rotación total será la diferencia entre la rotación de la línea perpendicular (o la tangente) al plano medio  $dw/dx$  y la deformación por corte  $\gamma$ , expresada como,



$$\beta_{\text{Timoshenko}} = \frac{dw}{dx} - \gamma \quad (3.35)$$

donde  $\gamma$  es constante a través del espesor. Las tensiones y deformaciones en realidad no permanecen constantes sino que varían a lo largo de la sección, por lo tanto  $\gamma$  no es más que una medida equivalente de la deformación por corte sobre un área de corte  $A = bh$ . La idealización de la deformación por corte constante en la sección es inconsistente con la suposición que asume que las tensiones de corte en las caras inferior y superior de la viga son cero. Para contrarrestar esta idealización se propuso el cálculo del Factor de Corrección de la energía de deformación por corte. En este enfoque energético para el cálculo de los Factores de Corrección [42] se iguala la energía de deformación por corte calculada a partir de la distribución de tensiones asumida constante, con la energía de deformación por corte calculada con la expresión para las tensiones de corte sobre la sección transversal rectangular de una viga y cuyo perfil es parabólico (Ec. de Jourawski, ver [37]). Las definiciones para la tensión de corte  $\tau_s$  y la deformación por corte  $\gamma_s$  asumidas como constantes son,

$$\tau_s = \frac{V}{A} \quad \gamma_s = \frac{\tau_s}{G_s} \quad (3.36)$$

donde  $V$  es la fuerza cortante sobre la sección y  $G_s$  es el módulo de corte. La distribución parabólica de tensiones cortantes para una viga de sección transversal rectangular dada por la teoría de vigas es [9],

$$\tau(y) = \frac{3}{2} \frac{V}{A} \left[ \frac{(h/2)^2 - y^2}{(h/2)^2} \right] \quad \text{para} \quad -\frac{h}{2} \leq y \leq \frac{h}{2} \quad (3.37)$$

El cálculo de la energía de deformación de corte transversal para una viga de longitud  $L$  utilizando la distribución de tensiones parabólica (Ec. 3.37) es [61],

$$U = \frac{bL}{2G} \int_{-h/2}^{h/2} \tau(y)^2 dy = \frac{LV^2}{2Gbh} \frac{6}{5} \quad (3.38)$$

mientras que el cálculo de la energía de deformación por corte para una viga de longitud  $L$  utilizando la distribución de tensiones asumida constante (Ec. 3.36) es,

$$U_s = \frac{bL}{2G_s} \int_{-h/2}^{h/2} \tau_s^2 dy = \frac{bL}{2G_s} \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{V}{A} \right)^2 dy = \frac{LV^2}{2G_s b h} \quad (3.39)$$

Igualando las energías de deformación por corte de las Ecs. 3.38 y 3.39 obtenemos,

$$G_s = \frac{5}{6}G \quad (3.40)$$

de donde se concluye que  $\kappa = 5/6$  es el factor multiplicativo que permite mejorar los cálculos de rigidez al usar el modelo que asume las deformaciones por corte constantes a través del espesor. En general,  $\kappa = 5/6$  se utiliza independientemente de cual sea la sección transversal, aún cuando a partir de los cálculos es claro que  $\kappa$  es dependiente de la geometría de la sección. En análisis estático de vigas delgadas la energía de deformación está dominada por el término de flexión, luego el factor  $\kappa$  no influye significativamente en la solución. Por otro lado, a medida que la razón  $L/h$  decrece la influencia de  $\kappa$  aumenta. En cálculos de vibración de vigas el efecto de  $\kappa$  aumenta con la frecuencia natural [61].

### 3.5.2. El factor de corrección en placas y cáscaras

En esta sección se estudiará la formulación implementada en el código de cómputo de esta tesis para el cálculo de los Factores de Corrección para el elemento de cáscara MITC4, la cual aplica también para elementos de placa.

La formulación cinemática del MITC4 de varias capas conduce a que las deformaciones de corte transversales son independientes de la coordenada local  $t$ . Esta aproximación genera dos errores [25]:

1. La energía de deformación de corte transversal del elemento no se estima correctamente debido a que las deformaciones de corte transversal se asumen constantes a través del espesor para cada capa (ver Sección 3.5.1), lo que puede distorsionar el valor de los resultados de desplazamientos para estructuras de cáscara gruesas o estructuras compuestas con baja rigidez en cortante (como las estructuras tipo sandwich).
2. Las tensiones de corte transversal a lo largo del espesor son constantes para cada capa y discontinuas entre una capa y otra.

A continuación se desarrolla una formulación para calcular dos factores de corrección asociados con las energías de las deformaciones de corte transversal. Se emplea el mismo enfoque energético del cálculo del SCF en vigas, donde se calcula la energía de deformación por corte transversal para el caso de una distribución de tensiones constante y para el caso de una distribución de tensiones parabólica. Se busca que la rigidez al corte se aproxime tanto como sea posible a la rigidez del modelo 3D, obtener una expresión para las tensiones de corte que satisfaga la condición de continuidad en las interfaces de las capas, y tensiones cero en las capas superior e inferior del elemento [25, 65]. El procedimiento desarrollado a continuación aplica para el caso de un material elástico lineal ortótropo. El sistema coordenado a emplear es un sistema cartesiano ortonormal de bases  $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ , donde  $1 \equiv x$ ,  $2 \equiv y$ ,  $3 \equiv z$ .

El primer paso para el cálculo de los factores es asumir que una placa está sometida a flexión cilíndrica en las dos direcciones del plano x-y, es decir,

$$\tau_x \neq 0 \qquad \tau_y \neq 0 \qquad \tau_{xy} = 0 \qquad (3.41)$$

Se desea obtener las tensiones de corte transversales en términos de las tensiones en el plano, lo cual es posible a partir de las ecuaciones de equilibrio elásticas 3D,

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial \tau_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \qquad (3.42)$$

La suposición de la Ec. 3.41 permite simplificar las Ecs. 3.42 como,

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial \tau_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \qquad (3.43)$$

Obtenemos las tensiones de corte integrando las Ecs. 3.43 a través del espesor, luego,

$$\tau_{xz} = - \int_{-h/2}^z \frac{\partial \tau_x}{\partial x} dz \qquad \tau_{yz} = - \int_{-h/2}^z \frac{\partial \tau_y}{\partial y} dz \qquad (3.44)$$

con  $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$  para  $z = -h/2$  y  $h/2$ . Asumiendo que las fuerzas axiales son despreciables podemos obtener las tensiones axiales en la capa  $n$  en términos de los momentos (flexión cilíndrica en los planos x-z, y-z), la distancia a partir del eje neutro y las cons-

tantes del material como,

$$\tau_x^n(z) = (z - z_o) \frac{C_{xx}^n}{I_x} M_x \quad \tau_y^n(z) = (z - z_o) \frac{C_{yy}^n}{I_y} M_y \quad (3.45)$$

donde  $M_x$  y  $M_y$  son los momentos flectores,  $C_{xx}^n$  y  $C_{yy}^n$  las componentes de la matriz del material ortótropo en las posiciones 11 y 22 para la capa  $n$ ,  $I_x$  y  $I_y$  las rigideces de flexión en los planos  $xz$  y  $yz$ , y  $z_o$  la posición del eje neutro, los cuales se definen como (sólo se muestran las expresiones para flexión en plano x-z),

$$C_{xx}^n = \frac{E_x^n}{1 - \nu_{xy}^n \nu_{yx}^n} \quad I_x = \int_{-h/2}^{h/2} C_{xx} (z - z_o)^2 dz \quad z_o = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} C_{xx} z dz}{\int_{-h/2}^{h/2} C_{xx} dz} \quad (3.46)$$

donde  $C_{xx} = C_{xx}^n$  en la capa  $n$ . Sustituyendo las Ecs. 3.45 en las Ecs. 3.44, integrando a través del espesor y usando las ecuaciones de equilibrio entre los momentos y las fuerzas de corte,

$$V_x = -\frac{\partial M_x}{\partial x} \quad V_y = -\frac{\partial M_y}{\partial y} \quad M_{xy} = 0 \quad (3.47)$$

obtenemos las tensiones de corte en función de  $z$  como,

$$\tau_{xz}(z) = \frac{V_x}{I_x} g_{xz}(z) \quad \tau_{yz}(z) = \frac{V_y}{I_y} g_{yz}(z) \quad (3.48)$$

donde  $g_{xz}(z)$  y  $g_{yz}(z)$  son las funciones de distribución de corte,

$$g_{xz}(z) = - \int_{-h/2}^z C_{xx} (z - z_o) dz \quad g_{yz}(z) = - \int_{-h/2}^z C_{yy} (z - z_o) dz \quad (3.49)$$

$g_{xz}$  y  $g_{yz}$  son funciones parabólicas cuyo valor es cero en  $-h/2$  y  $h/2$  y continuas entre capas.  $C_{xx}$  y  $C_{yy}$  son constantes para todas las capas. Las energías de deformación por corte transversal exactas se expresan como,

$$U_{xz} = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\tau_{xz}^2}{G_{xz}} dz = \frac{V_x^2}{2I_x^2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{g_{xz}^2(z)}{G_{xz}} dz \quad (3.50)$$

$$U_{yz} = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\tau_{yz}^2}{G_{yz}} dz = \frac{V_y^2}{2I_y^2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{g_{yz}^2(z)}{G_{yz}} dz \quad (3.51)$$

Las energías de deformación por corte transversal que resultan de asumir una distribución de tensiones constante a través del espesor son,

$$\bar{U}_{xz} = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \gamma_{xz} dz = \frac{1}{2} \frac{V_x^2}{\kappa_{xz} \int_{-h/2}^{h/2} G_{xz} dz} \quad (3.52)$$

$$\bar{U}_{yz} = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} \gamma_{yz} dz = \frac{1}{2} \frac{V_y^2}{\kappa_{yz} \int_{-h/2}^{h/2} G_{yz} dz} \quad (3.53)$$

Igualando  $U_{xz} = \bar{U}_{xz}$  y  $U_{yz} = \bar{U}_{yz}$  finalmente obtenemos,

$$\kappa_{xz} = \frac{I_x^2}{\int_{-h/2}^{h/2} G_{xz} dz \int_{-h/2}^{h/2} \frac{g_{xz}^2(z)}{G_{xz}} dz} \quad \kappa_{yz} = \frac{I_y^2}{\int_{-h/2}^{h/2} G_{yz} dz \int_{-h/2}^{h/2} \frac{g_{yz}^2(z)}{G_{yz}} dz} \quad (3.54)$$

Adicionalmente,  $\kappa_{xz} = \bar{U}_{xz}/U_{xz}$  y  $\kappa_{yz} = \bar{U}_{yz}/U_{yz}$ . Para un material homogéneo  $\kappa_{xz} = \kappa_{yz} = \kappa = 5/6$ . Material complementario sobre el cálculo de los SCF puede consultarse en la Ref. [47].

### 3.5.3. Discretización y cálculo de los factores de corrección

Para calcular numéricamente los factores de corrección es necesario discretizar las integrales de las Ecs. 3.54, las cuales se pueden reescribir como:

$$\kappa_{xz} = \frac{I_x^2}{J_x K_x} \quad \kappa_{yz} = \frac{I_y^2}{J_y K_y} \quad (3.55)$$

La  $k$ -ésima capa del elemento está entre las coordenadas de espesor  $z_{k-1}$  y  $z_k$  (ver Fig. 3.8). El desarrollo de cada término se escribe a continuación [39]:

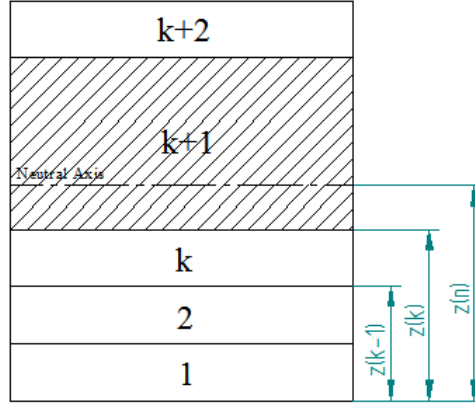


Figura 3.8: Disposición de capas y sistema de coordenadas a través del espesor.

$$I_x = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n C'_{(1,1)}^{(k)} [(z_k - z_{nx})^3 - (z_{k-1} - z_{nx})^3] \quad (3.56)$$

$$I_y = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n C'_{(2,2)}^{(k)} [(z_k - z_{ny})^3 - (z_{k-1} - z_{ny})^3] \quad (3.57)$$

Los términos  $C'_{(i,i)}^{(k)}$  corresponden a la posición  $(i, i)$  de la matriz constitutiva rotada del sistema ortótropo al sistema local de referencia en dirección 3-4 para la capa  $k$  (ver 3.22).

$$J_x = \sum_{k=1}^N C'_{(5,5)}^{(k)} (z_k - z_{k-1}) \quad J_y = \sum_{k=1}^N C'_{(4,4)}^{(k)} (z_k - z_{k-1}) \quad (3.58)$$

$$K_x = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \frac{g_{xz}^2(z)}{C'_{(5,5)}^{(k)}} dz \quad K_y = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \frac{g_{yz}^2(z)}{C'_{(4,4)}^{(k)}} dz \quad (3.59)$$

con,

$$g_{xz}(z) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_k-1} C'_{(1,1)}^{(k)} [(z_k - z_{nx})^2 - (z_{k-1} - z_{nx})^2] - \frac{1}{2} C'_{(1,1)}^{(n_k)} [(z - z_{nx})^2 - (z_{nk} - z_{nx})^2] \quad (3.60)$$

$$g_{yz}(z) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_k-1} C'_{(2,2)}^{(k)} [(z_k - z_{ny})^2 - (z_{k-1} - z_{ny})^2] - \frac{1}{2} C'_{(2,2)}^{(n_k)} [(z - z_{ny})^2 - (z_{nk} - z_{ny})^2] \quad (3.61)$$

Los valores  $g_{xz}$  y  $g_{yz}$  son evaluados en la superficie inferior de cada capa y sumados hasta la capa actual  $n_k$ , siendo  $N$  el número total de capas. La superficie neutra del arreglo de capas es,

$$z_{nx} = \frac{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N C'_{(1,1)}^{(k)} (z_k^2 - z_{k-1}^2)}{\sum_{k=1}^N C'_{(1,1)}^{(k)} (z_k - z_{k-1})} \quad z_{ny} = \frac{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N C'_{(2,2)}^{(k)} (z_k^2 - z_{k-1}^2)}{\sum_{k=1}^N C'_{(2,2)}^{(k)} (z_k - z_{k-1})} \quad (3.62)$$

Para usar los factores de corrección para el elemento MITC4 se puede despreciar la influencia de la curvatura y usar los factores anteriores que fueron desarrollados para un elemento de placa ([47], p. 626).

Para profundizar en el comportamiento de las funciones de cálculo de los SCF (ver Ecs. 3.55) y con el único objetivo de aumentar la comprensión de la dependencia funcional se calcularán  $\kappa_{13}$  y  $\kappa_{23}$  en función de la orientación de un material de 4 capas con orientación  $[0/90/90/0]$  que será rotado completo entre 0 y 90 grados en incrementos de 10 grados. La razón longitud/espesor total  $L/h=6.67$ . El material de base para el ejercicio es un material con todas las capas isótropas y con propiedades:  $E_1 = E_2 = 25$ ,  $\nu_{12} = 0.25$ ,  $G_{12} = G_{13} = G_{23} = E_1/2(1 + \nu)$ , espesor de capas  $h_1 = h_2 = h_3 = h_4$ ,  $\beta_1 = \beta_4 = 0^\circ$ ,  $\beta_2 = \beta_3 = 90^\circ$ . Los materiales de prueba son el material base con las siguientes modificaciones:

- Material 1: mismo material isótropo base para cada capa.
- Material 2:  $E_2 = E_1/25$  para cada capa.
- Material 3:  $E_2 = E_1/50$  para cada capa.
- Material 4:  $G_{23} = (1/2) * G_{13}$  para cada capa.
- Material 5:  $G_{23} = (1/4) * G_{13}$  para cada capa.

- Material 6: módulos de corte transversal de capas 2 y 3 son una décima parte de módulos de corte transversal de capas 1 y 4;  $G_{13n} = G_{23n} = G_{13l}/10 = G_{23l}/10$  ( $n$  hace referencia al material del núcleo y  $l$  al material de las láminas exteriores, todas del mismo espesor).
- Material 7: Material 6 + Material 2.
- Material 8: Material 7 con  $h_2 = h_3 = 4h_1 = 4h_2$ .

El resultado se puede apreciar en la Fig. 3.9. Para el Material 1 (4 capas isótropas) los SCF tienen un valor constante  $\kappa_{13} = \kappa_{23} = 5/6 = 0.866$ . Para los Materiales 2 y 3 se comprueba que la razón  $E_1/E_2$  por si sola modifica los SCF a valores diferentes de  $5/6$ . Del mismo modo para los Materiales 4 y 5 debido a la incidencia de la razón  $G_{13}/G_{23}$ . Para el Material 6 los SCF son constantes en un valor por debajo de  $5/6$ , y actúa reduciendo drásticamente los módulos de corte de las capas 1 y 4. Para el Material 7 el cambio  $E_2 = E_1/25$  introduce variaciones de los SCF, los cuales dejan de ser constantes. Por último el Material 8 corresponde a un *sandwich* con una razón entre espesor del núcleo y espesor de las láminas exteriores de 8:1. Esta variable también introduce cambios en los SCF. Para el material simétrico con orientación cruzada que ha sido estudiado, el ángulo  $\beta = 45^\circ$ , que resulta en una orientación  $[45/135/135/45]$ , se considera un caso especial donde siempre se cumple que  $\kappa_{13} = \kappa_{23}$ .



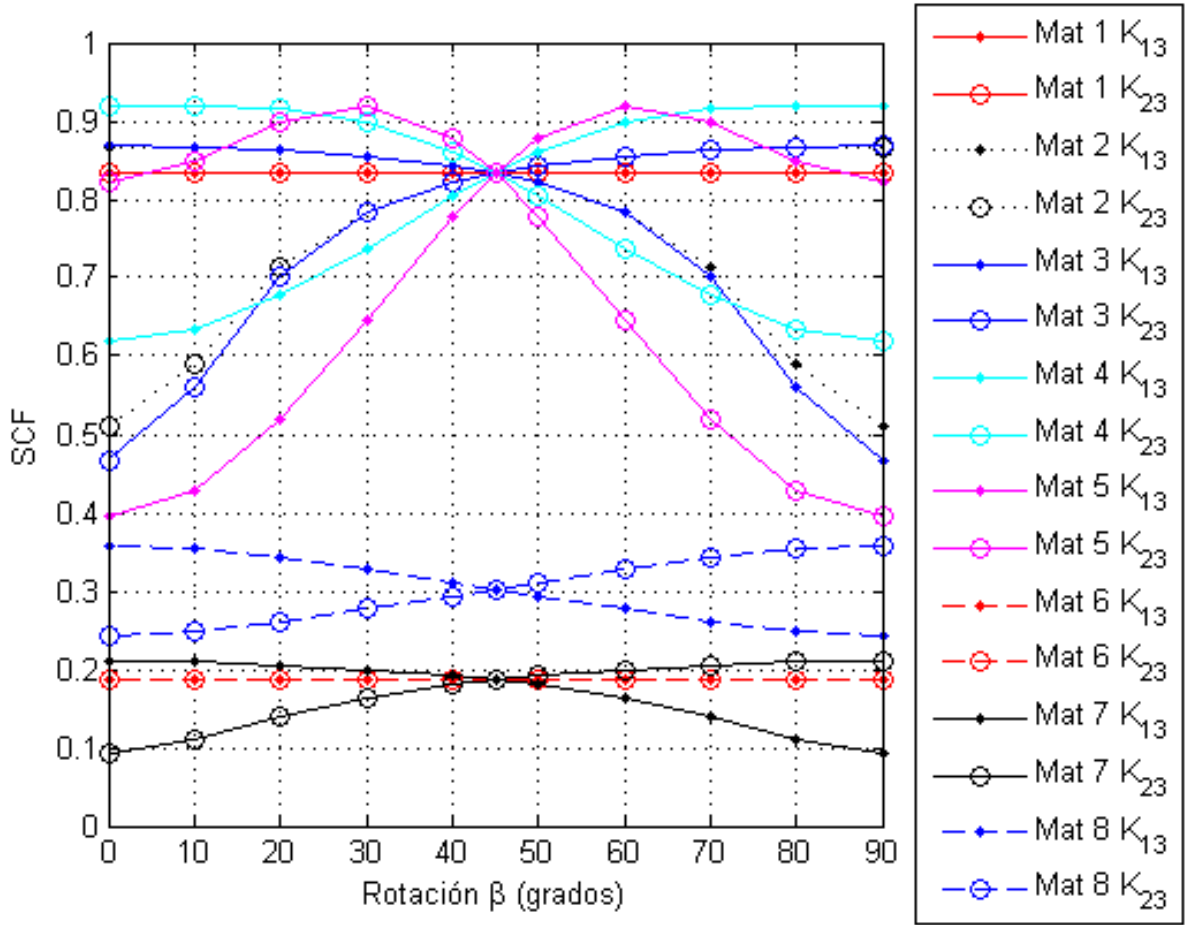


Figura 3.9: Variación de los SCF con la orientación,  $E_1/E_2$ ,  $G_{13}/G_{23}$ ,  $G_l/G_n$  y  $h_n/h_l$ .

Con el siguiente ejercicio se ilustrará la variación de los SCF con el número de capas. El material consiste de capas de material ortótropo dispuestas en orientaciones  $[90/0]_s$ , donde las dos capas centrales están orientadas a  $90^\circ$  para conservar la simetría. Todas las capas poseen el mismo espesor y las mismas propiedades unidireccionales:

$$\frac{E_1}{E_2} = 25; \quad \frac{G_{12}}{E_2} = \frac{G_{13}}{E_2} = 0,5; \quad \frac{G_{23}}{E_2} = 0,2; \quad \nu_{12} = 0,25 \quad (3.63)$$

donde la dirección 1 es paralela a las fibras y la dirección 2 es transversal en el plano. Los resultados para  $\kappa_{13}$  y  $\kappa_{23}$  en función del número de capas  $n$  se observa en la Fig. 3.10.

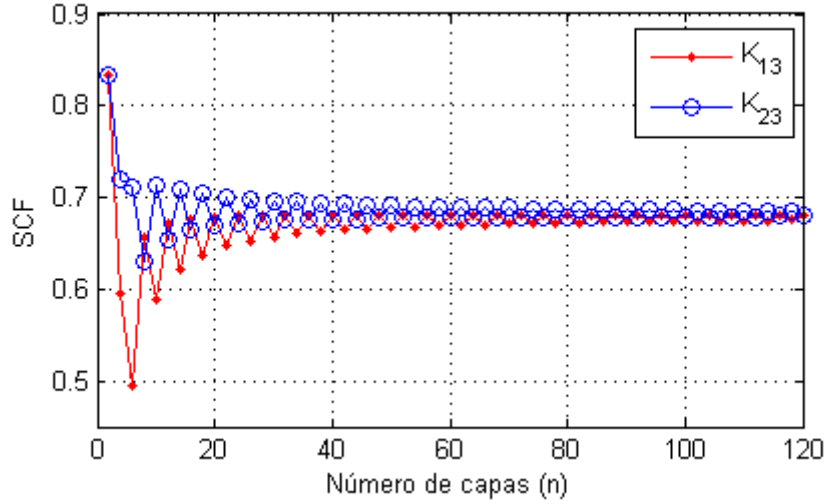


Figura 3.10: Variación de los SCF con el número de capas. Compuesto simétrico de capas ortótropas con orientación  $[90/0]_s$ .

Las variaciones de los SCF son importantes cuando  $n$  es pequeño, mientras que a valores de  $n$  grandes los SCF tienden a tomar valores constantes. Para  $n = 2$  ambas capas están orientadas en la misma dirección, lo que equivale a tener una sola capa. El resultado es  $\kappa_{13} = \kappa_{23} = 5/6$ . Para  $n = 120$  los resultados son  $\kappa_{13} = 0,6808$  y  $\kappa_{23} = 0,6794$ , valores que son diferentes al valor clásico para materiales homogéneos  $\kappa = 5/6 = 0,8333$ . De realizarse otro ejercicio con el mismo material, pero con una razón  $G_{13}/G_{23} \approx 1$ , se podría comprobar que el resultado de los SCF para  $n = 120$  estaría cercano a  $5/6$ .

### 3.6. Casos de prueba para compuestos laminares delgados

Los casos de prueba de esta sección pretenden poner a prueba la formulación e implementación destinada a modelar estructuras compuestas de materiales ortótropos, donde cada capa pueda variar su ángulo de orientación y material, y cuyo número de capas pueda ser arbitrario. Adicionalmente, se pondrá a prueba la función de cálculo de los Factores de Corrección y la sensibilidad de las soluciones del modelo de elemento finito ante su aplicación. Todos los casos de prueba presentan materiales de varias capas a excepción del presentado en la sección 3.6.2.

### 3.6.1. *Patch test* para elemento de varias capas

El objetivo de esta sección es comprobar si la integración numérica de un elemento de varias capas a través del espesor se realiza adecuadamente, proveyendo campos de tensiones constantes de acuerdo a cada caso de carga. La malla utilizada en este *Patch test* es la misma malla de 5 elementos distorsionados observada en la Fig. 2.3. Se evaluarán espesores totales de 1 y 0.001 mm. Los elementos son tipo *sandwich* de tres capas, donde las fracciones de espesor de cada capa son 0.25, 0.5 y 0.25. El material es isótropo, con  $E = 2.1e6$  y  $\nu = 0.3$ . Los resultados de los campos de tensiones revisados capa por capa para todos los puntos de Gauss mostraron los mismos resultados que el *Patch Test* de una capa. Para los casos de Flexión (para  $\tau_{xx}$  y  $\tau_{yy}$ ) y Giro ( $\tau_{xy}$ ) se observó simetría de tensiones con respecto a la superficie media de los elementos, cambiando sólo su signo. Esto comprueba la integración correcta de los elementos de varias capas. Esta prueba sigue las recomendaciones contenidas en la Ref. [60].

### 3.6.2. Placa cuadrada ortótropa de una capa con carga de presión

Una placa ortótropa de una capa se somete a una carga de presión uniforme de 1 psi. La placa se encuentra empotrada en los cuatro bordes y tiene dimensiones de 1 in x 1 in x 0.01 in (ver Fig. 3.11). Se calcula la deflexión del punto central para dos casos. Uno donde el material se rota 15 grados y otro donde se rota 45 grados. Las propiedades del material son:  $E_x = 40000$  psi,  $E_y = 1000$  psi,  $E_z = 1000$  psi,  $\nu_{xy} = 0.25$ ,  $\nu_{yz} = 0.0$ ,  $\nu_{xz} = 0.0$ ,  $G_{xy} = 500$  psi,  $G_{yz} = 416.7$  psi,  $G_{xz} = 500$  psi. El problema se modela completo con malla de 16 x 16 elementos. En cada borde se restringen todos los grados de libertad nodales. Los resultados para un ángulo de  $45^\circ$  se presentan en la tabla 3.2. Una ilustración de los desplazamientos nodales se presenta en la Fig. 3.12.

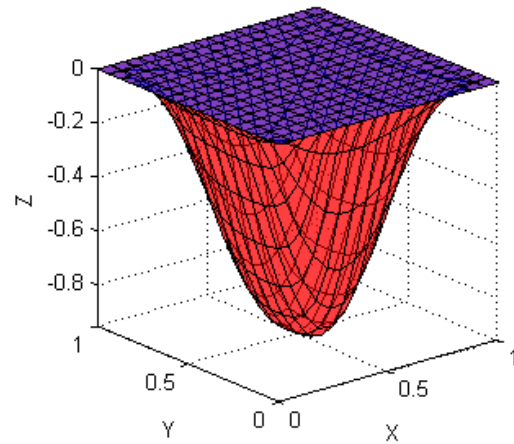
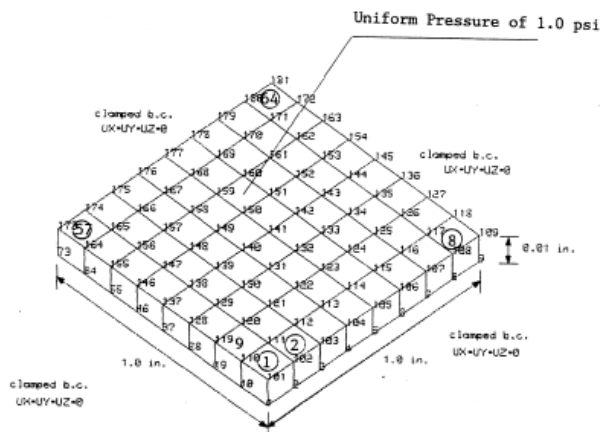


Figura 3.11: Placa ortótropa de 1 capa.

Figura 3.12: Desplazamientos nodales de placa ortótropa.

Referencia	Sol. SCF=1	Sol. SCF=5/6	FEM SCF/Ana.	Error %
Analítica Ref. [46], $45^\circ$	-1.6311	N/A	N/A	N/A
Esta tesis 4x4, $45^\circ$	-1.2940	-1.3003	0.7972	-20.2808
Esta tesis 8x8, $45^\circ$	-1.6020	-1.6077	0.9857	-1.4346
Esta tesis 12x12, $45^\circ$	-1.6182	-1.6243	0.9958	-0.4169
Esta tesis 16x16, $45^\circ$	-1.6233	-1.6296	0.9991	-0.092

Tabla 3.2: Soluciones del problema de la Placa ortótropa de 1 capa orientada  $45^\circ$ . SCF  $\kappa_{23} = \kappa_{13} = 5/6$ .

Los resultados para un ángulo de  $15^\circ$  se presentan en la Tabla 3.3. Los resultados muestran que la sensibilidad del modelo ante la aplicación de los SCF calculados para un material ortótropo de una capa es muy baja.

Referencia	Sol. SCF=1	Sol. SCF=5/6	FEM SCF/Ana.	Error %
FEM Ref. [15] 16x16, $15^\circ$	-0.9521	N/A	N/A	N/A
Esta tesis 16x16, $15^\circ$	-0.9505	-0.9562	1.0043	0.4306

Tabla 3.3: Soluciones del problema de la Placa ortótropa de 1 capa orientada  $15^\circ$ . SCF  $\kappa_{23} = \kappa_{13} = 5/6$ .

### 3.6.3. Placa cuadrada de 3 capas con carga de presión uniforme

El problema y su solución analítica fueron propuestos por Pagano en la Referencia [48]. Se trata de una placa cuadrada simplemente apoyada de dimensiones 20x20x1 con una carga de presión transversal uniforme (ver Figura 3.13). La placa consta de 3 capas, todas con las mismas propiedades ortótropas, que son:  $E_1 = 25e4$ ,  $E_2 = 1e4$ ,  $G_{12} = 0.5e4$ ,  $G_{23} = 0.2e4$ ,  $G_{13} = 0.5e4$ ,  $\nu_{12} = 0.01$ ,  $\nu_{23} = 0.25$ ,  $\nu_{13} = 0.01$ . La orientación del material de cada capa es de 0, 90 y 0 grados, tomando como referencia el eje x para las capas 1, 2 y 3, respectivamente. Todas las capas tienen el mismo espesor. La impresión de los desplazamientos nodales del cuarto de placa se aprecian en la Fig. 3.14 y una ilustración de las tensiones de Von Mises en la Fig. 3.15.

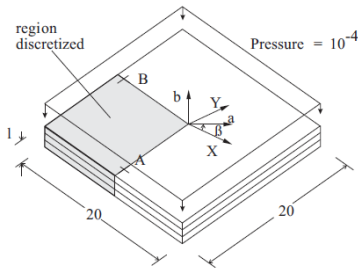


Figura 3.13: Placa 3 capas [2].

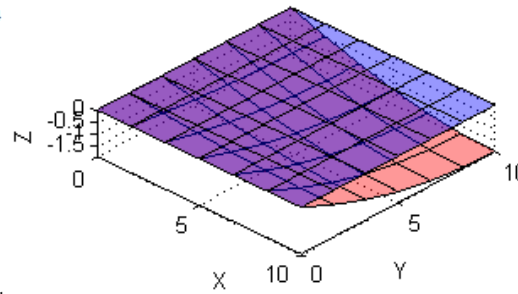


Figura 3.14: Desplazamientos.

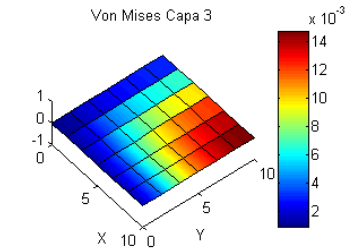


Figura 3.15: T. Von Mises

Se modeló el problema con una malla 6x6 elementos que cubre 1/4 del total de la placa y se aplicaron condiciones de borde de simetría. Los resultados para el desplazamiento transversal en el centro de la placa se encuentran en la Tabla 3.4.

Referencia	Sol. SCF=1	Sol. SCF $\kappa_{23}, \kappa_{13}$	FEM SCF/Ana.	Error %
Analítica Ref. [48]	$1,27 \times 10^{-5}$	N/A	N/A	N/A
ADINA (6x6)	$1,19104 \times 10^{-5}$	$1,28041 \times 10^{-5}$	1.0082	0.8197
Esta tesis (2x2)	$1,2621 \times 10^{-5}$	$1,3592 \times 10^{-5}$	1.0702	7.0236
Esta tesis (4x4)	$1,2299 \times 10^{-5}$	$1,3177 \times 10^{-5}$	1.0376	3.7559
Esta tesis (6x6)	$1,19104 \times 10^{-5}$	$1,26808 \times 10^{-5}$	0.9985	-0.1512

Tabla 3.4: Soluciones del problema de la Placa ortótropa de 3 capas. SCF  $\kappa_{23}=0.8028$ ,  $\kappa_{13}=0.5828$ .

Para la malla de 6x6 elementos la diferencia entre la solución con y sin los SCF es del

6.1 %, con una razón  $L/h=20$ . Los SCF son diferentes a  $5/6$ , lo cual es producto de la orientación a  $90^\circ$  de la segunda capa.

### 3.6.4. Placa ortótropa de 2 capas antisimétrica

La Figura 3.16 muestra una placa cuadrada empotrada con dos capas del mismo material orientadas a  $0$  y  $90$  grados, de espesor  $h = 0,64$  in y lado  $a = 32$  in. y sujeta a una carga distribuida  $q = 10$  psi. Se busca el desplazamiento  $U_z$  en el centro. Material:  $E_x = 40.0e6$  psi,  $E_y = 1.0e6$  psi,  $G_{xy} = G_{yz} = G_{xz} = 0.5e6$  psi,  $\nu_{xy} = 0.25$ . Debido a la simetría sólo se modela un cuarto de la placa. Condiciones de borde: en  $x = 0.0$  in,  $U_x = U_y = U_z = Rot_x = Rot_y = 0.0$ . En  $y = 0.0$  in,  $U_x = U_y = U_z = Rot_x = Rot_y = 0.0$ . En  $x = 16.0$  in,  $U_x = Rot_y = 0.0$ . En  $y = 16.0$  in,  $U_y = Rot_x = 0.0$ . Ver malla con desplazamientos en la Fig. 3.17 y resultados en Tabla 3.5.

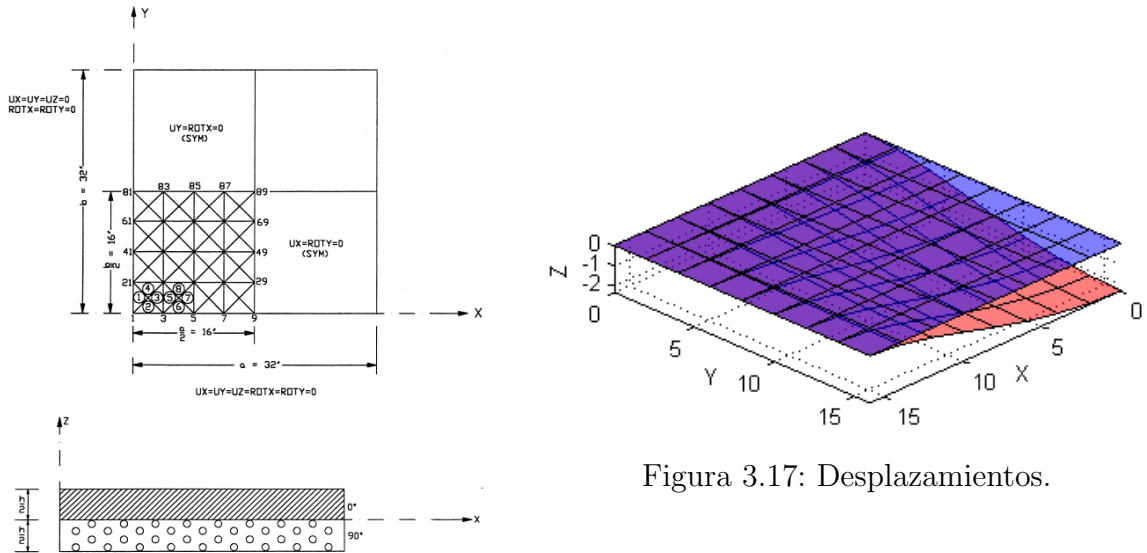


Figura 3.17: Desplazamientos.

Figura 3.16: Placa 2 capas antisim.

Modelo	$w_c$ SCF=1	$w_c$ SCF $\kappa_{23}, \kappa_{13}$	$w_c$ FEM SCF/ $w_c$ AN	Error %
Ref. [66]	-0.1140	N/A	N/A	N/A
Esta tesis (8x8)	-0.1168	-0.1187	1.0246	2.4561

Tabla 3.5: Desplazamiento  $U_z$  de placa empotrada de 2 capas antisimétrica. SCF  $\kappa_{23} = \kappa_{13} = 0.5573$ .

La corrección inducida por los SCF se debe la orientación de los materiales y a la razón  $E_x/E_y = 40$ . Debido a que las razones entre los módulos de corte de las capas

y entre módulos de corte de cada capa es igual a uno la solución no se ve afectada de manera importante por la aplicación de los SCF. La razón  $L/h=50$  también incide en este resultado.

### 3.6.5. Frecuencias Naturales de placa cuadrada de material compuesto

Se tiene una placa compuesta de nueve capas con orientación alternada de 0 y 90 grados con respecto al eje global Z y simplemente apoyada en los cuatro bordes. La medida de su lado es 1 in. El espesor de las capas a  $0^\circ$  es 0.001 in, y a  $90^\circ$  de 0.00125 in (ver Figura 3.18).

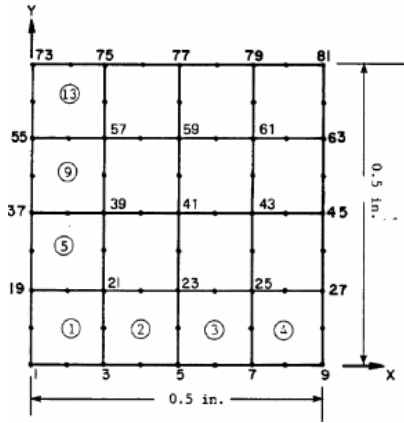


Figura 3.18: Placa de 9 capas [15].

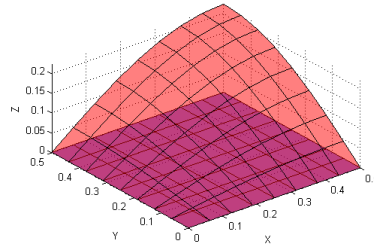


Figura 3.19: Modo 1, 29.96 Hz. 1/4 de placa.

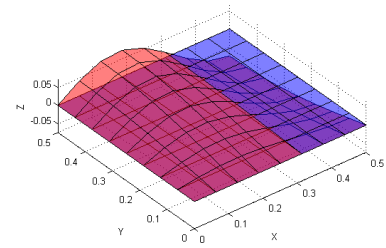


Figura 3.20: Modo 2, 166.94 Hz. 1/4 de placa.

Material:  $E_x = 40 \text{e6 psi}$ ,  $E_y = 1 \text{e6 psi}$ ,  $\nu_{xy} = 0.25$ ,  $G_{xy} = 0.6 \text{e6 psi}$ ,  $G_{xz} = 0.6 \text{e6 psi}$ ,  $G_{yz} = 0.5 \text{e6 psi}$ ,  $\rho = 1.0 \text{ lb.sec}^2/\text{in}^4$  (densidad de masa). Sólo se modela un cuarto de la placa con las siguientes condiciones de simetría:  $U_x = 0.0$ ,  $Rot_y = 0.0$ ,  $Rot_z = 0.0$  y  $U_y = 0.0$ ,  $Rot_x = 0.0$ ,  $Rot_z = 0.0$  son aplicadas a lo largo de  $X = 0.5$  y  $Y = 0.5$ , respectivamente. Los desplazamientos normales a la placa  $U_z$  están restringidos para los nodos sobre los bordes de la placa. Los desplazamientos en el plano ( $U_x$ ,  $U_y$ ) y las rotaciones alrededor de la normal a la placa ( $Rot_z$ ) se eliminan para todos los nodos. Los resultados para las primeras cuatro frecuencias naturales se encuentran en la Tabla 3.6. Los modos 1 y 2 se pueden apreciar en las Figs. 3.19 y 3.20.

Frec.	Ref. [6]	SCF=1 4x4 (Err. %)	SCF $\kappa_{23}, \kappa_{13}$ 4x4 (Err. %)	SCF=1 8x8 (Err. %)	SCF $\kappa_{23}, \kappa_{13}$ 8x8 (Err. %)	SCF=1 16x16 (Err. %)	SCF $\kappa_{23}, \kappa_{13}$ 16x16 (Err. %)
1	30.064	29.813 (-0.834)	29.800 (- 0.878)	29.959 (-0.348)	29.946 (- 0.393)	29.994 (-0.233)	29.980 (-0.279)
2	167.113	173.263 (3.680)	172.689 (3.337)	166.935 (-0.107)	166.476 (-0.381)	165.668 (-0.865)	165.231 (-1.126)
3	205.867	212.329 (3.139)	211.256 (2.618)	204.517 (-0.656)	203.658 (-1.073)	202.935 (-1.424)	202.117 (-1.822)
4	270.579	252.201 (-6.792)	251.030 (-7.225)	262.250 (-3.078)	261.230 (-3.455)	265.246 (-1.971)	264.251 (-2.339)

Tabla 3.6: Primeras 4 frecuencias naturales de placa de 9 capas [Hz]. SCF  $\kappa_{23}=0.7143$ ,  $\kappa_{13}=0.8742$ .

Los resultados presentados en la Tabla 3.6 muestran que el modelo implementado posee una sensibilidad baja frente al uso de los Factores de Corrección  $\kappa_{23}$  y  $\kappa_{13}$  calculados. También muestran que, en general, los resultados son mejores con SCF=1. En la Ref. [55] (pág. 444) se halló un estudio que calcula las primeras cuatro frecuencias de una placa isótropa usando teoría de placas para deformaciones de primer orden. Concluye que mientras más bajos son los SCF menores son las frecuencias naturales calculadas. Esto debido a la disminución de la rigidez al corte transversal del material. En la Tabla 3.7 se presentan algunos de sus resultados.

SCF $\kappa$	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
1.0	5.794	13.899	21.424	26.171
5/6	5.769	13.764	21.121	25.734
2/3	5.732	13.568	20.688	25.115

Tabla 3.7: Frecuencias naturales de placa isótropa con SCF variable. Tomada de [55].

En este capítulo se presentó la teoría del elemento MITC4 aplicado a materiales compuestos laminares delgados con aplicación de los Factores de Corrección calculados con el método de corrección de la energía por deformación de corte transversal. Se encontró que la sensibilidad del elemento ante la aplicación de los SCF en materiales ortótropos de una capa es muy baja. Su sensibilidad aumenta en materiales de varias capas ortótropas



y orientadas a medida que aumenta la ortotropía del material de cada capa y la razón entre los módulos de Young y de corte entre capas, donde estos últimos tienen la mayor importancia. A partir de los resultados obtenidos en los casos de prueba de este capítulo no es posible concluir si el uso del método de cálculo de los SCF mejora o deteriora los resultados, debido a que se presentan ambos casos. La máxima diferencia de error entre una solución con  $SCF=1$  y con SCF calculado fue de 6 % y se presentó para el caso de la placa cuadrada de 3 capas con carga de presión uniforme. Las ventajas que ofrece el método de los SCF se evidenciarán mucho mejor al aplicarlo a materiales compuestos tipo *sandwich*, en donde los módulos de corte transversal del núcleo son mucho menores que los módulos de corte transversal de las láminas exteriores, y en donde las razones entre el espesor y la longitud característica del material son mucho mayores que las razones  $h/L$  de los materiales estudiados en este capítulo.

# Capítulo 4

## Análisis de compuestos tipo *sandwich*

### 4.1. Materiales compuestos tipo sandwich

Las estructuras tipo *sandwich* (ver Fig. 4.1) son un caso especial de estructura laminar compuesta por dos láminas exteriores y un núcleo, donde la función de este último es resistir las cargas transversales de corte, de manera similar al alma de una viga de patín ancho (sección I) [63]. La mejora propuesta por el elemento MITC4 al elemento A-I-Z soluciona el problema del bloqueo que se presenta en estructuras muy delgadas, sin embargo, es necesario un cuidado adicional para el caso particular de estructuras tipo *sandwich* con núcleo grueso y con constantes elásticas mucho menores, en donde el modelo MITC4 de varias capas sin SCF ofrece resultados muy pobres [60].

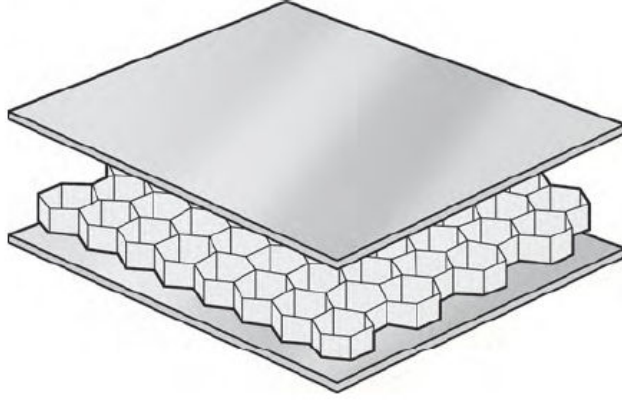


Figura 4.1: Panel tipo Honeycomb. Tomada de [7].

Las estructuras tipo *sandwich* soportan cargas de corte transversal de una manera diferente a los compuestos laminares delgados. Para profundizar en el comportamiento de este tipo de estructuras se analizará el mecanismo de soporte de carga de una placa sometida a cargas transversales normales (ver Fig. 4.2), modelando cada capa con un resorte de rigidez  $G_{capa}H_{capa}$ , donde la rigidez total puede calcularse idealizando el panel como una serie de resortes, tal como se ilustra en la Fig. 4.3. Luego, la rigidez del panel puede obtenerse como,

$$\frac{1}{G_{total}h_{total}} = \frac{1}{G_{lámina}h_{lámina}} + \frac{1}{G_{núcleo}h_{núcleo}} + \frac{1}{G_{lámina}h_{lámina}} \quad (4.1)$$

En general, para materiales tipo *sandwich*, el producto  $G_{lámina}h_{lámina}$  es mucho mayor, por varios órdenes de magnitud, que el producto  $G_{núcleo}h_{núcleo}$ , dado que  $G_{núcleo} \ll G_{lámina}$  y  $h_{lámina} < h_{núcleo}$ . Debido a esto, es razonable asumir que el núcleo soporta todas las tensiones de corte transversal. Un método para mejorar los resultados del modelo de cáscara MITC4 para la simulación de paneles tipo *sandwich* consiste en ajustar la relación constitutiva del material de las láminas exteriores haciendo los módulos de corte transversal iguales a cero, esto es,  $G_{23} = G_{13} = 0$  [60]. En consecuencia, la rigidez al corte transversal del compuesto tipo *sandwich* estaría determinada completamente por los valores de los módulos de corte transversal del núcleo. Esta práctica constituye una alternativa a la aplicación de Factores de Corrección de Corte Transversal (SCF) calculados, debido a

que el efecto de estos sobre los módulos de corte transversal de las láminas exteriores es similar, al reducir los módulos de corte debido a su multiplicación con factores cuyo valor está muy por debajo de la unidad. Estos valores pequeños para  $\kappa_{23}$  y  $\kappa_{13}$  resultarán para aquellos materiales donde los módulos de corte transversal de las láminas exteriores son mucho mayores que los módulos de corte transversal del núcleo (ver Fig. 3.9).

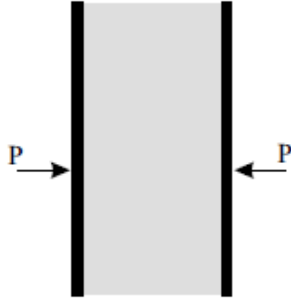


Figura 4.2: Placa tipo *sandwich* sometida a cargas transversales normales [60].



Figura 4.3: Analogía con resortes para el módulo de corte transversal [60].

Para evaluar los resultados de usar  $G_{23} = G_{13} = 0$  para las propiedades de las láminas exteriores se utilizó el código implementado en esta tesis para simular el problema de la agencia NAFEMS para compuestos tipo *sandwich* [27], para el cual se obtuvo un error en el desplazamiento transversal del panel sometido a presión uniforme de 14.4 %. Detalles sobre esta simulación pueden hallarse en la Sección 4.3.2. Una solución más general que permite corregir el problema de la baja rigidez del núcleo en compuestos gruesos con baja rigidez al corte es el uso de factores de corrección de la energía de corte transversal, propuesta que fue desarrollada previamente en la Sección 3.5.

## 4.2. Compuestos tipo *sandwich* con núcleo de *honeycomb*

Los compuestos tipo *sandwich* con núcleo del tipo panal de abeja (*honeycomb*) son usados con mucha frecuencia en aplicaciones que requieran de estructuras con bajo peso, alta rigidez y durabilidad. Las láminas exteriores del panel pueden compararse con los patines de una viga en I, donde una de las láminas soporta tensiones de tracción y la otra tensiones de compresión al someterse a cargas de flexión. El núcleo de *honeycomb* puede compararse también con el alma de la misma viga, el cual actúa resistiendo las cargas cortantes y aumentando la rigidez de la estructura al mantener las láminas separadas

(ver Fig. 4.4). La estructura de tipo *honeycomb* supera a la viga en I al producir un panel de rigidez uniforme al proveer un soporte continuo a lo largo y ancho de las láminas. El adhesivo que actúe como unión entre el núcleo y las láminas juega un papel fundamental al consolidar todos los elementos en uno solo con suficiente rigidez ante cargas torsionales y de flexión. En las simulaciones de este trabajo se asume que la unión entre núcleo y láminas es ideal. Una comparación entre paneles sólidos y paneles con núcleo de *honeycomb* se encuentra en la Tabla 4.1.


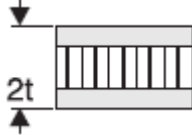
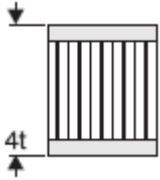
	Material sólido	Esp. núcleo = $t$	Esp. núcleo = $3t$
			
Rigidez	1.0	7.0	37.0
Resistencia a Flexión	1.0	3.5	9.2
Peso	1.0	1.03	1.06

Tabla 4.1: Rigidez y peso relativos de paneles con núcleo de *honeycomb* en comparación con paneles sólidos.

Algunos materiales típicos de los paneles tipo panal son Aluminio, Nomex (aramida), Korex, Kevlar, Fibra de vidrio y Fibra de carbono. Su forma es como lo muestra la Figura 4.5, donde se distinguen las direcciones L y W, paralelas a las cuales se definen las propiedades del núcleo.

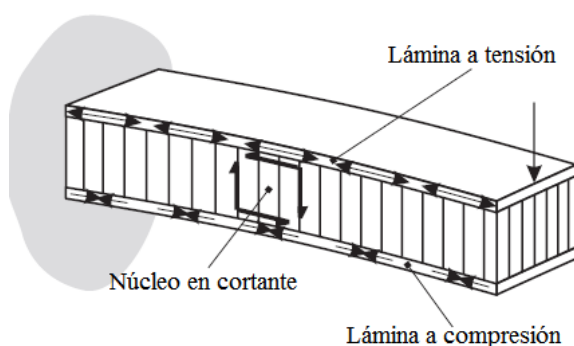


Figura 4.4: Tensiones de panel tipo *honeycomb* ante cargas de flexión. Tomada de [28].

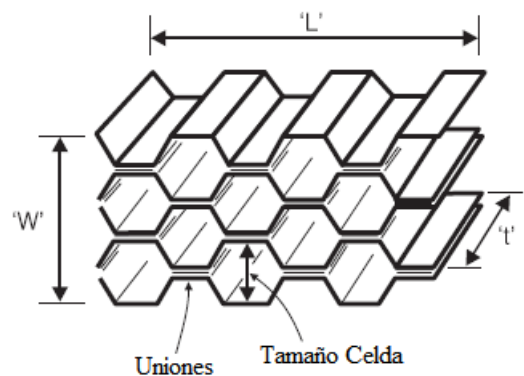


Figura 4.5: Esquema del núcleo tipo panal de abeja. Tomada de [28].

Para analizar el comportamiento de un panel tipo panal se propone tomar una viga

con núcleo de *honeycomb* en voladizo con una carga en el extremo. La deflexión de la viga producto de la carga aplicada es la suma de la deflexión creada por el momento flector, que se hace máximo en el extremo empotrado, y de la deflexión creada por las fuerzas de corte. La deflexión por flexión es función de los módulos elásticos a tracción y compresión  $E_1$  y  $E_2$  de las láminas exteriores, mientras que la deflexión por cortante es función de los módulos de corte fuera del plano  $G_{23}$  y  $G_{13}$  del núcleo.

#### 4.2.1. Modelado computacional de paneles tipo *sandwich* con núcleo de *honeycomb*

Algunas suposiciones importantes que se pueden tener en cuenta para la simulación de paneles tipo panel empleando el Método de los Elementos Finitos son:

1. Las fuerzas de corte transversal aplicadas sobre el panel serán soportadas por el núcleo.
2. Los momentos flectores y fuerzas en el plano aplicadas sobre el panel serán soportadas por las láminas exteriores como fuerzas membranales, debido a que la rigidez del núcleo en el plano es muy pequeña en comparación con la rigidez de las láminas exteriores en el plano.
3. Para modelos donde la razón largo/espesor del panel es grande se podría despreciar la acción de las fuerzas de corte transversal sobre el núcleo y usar modelos de elementos finitos para compuestos laminares delgados.

El modelo de Elementos Finitos implementado en este trabajo introduce las suposiciones antes mencionadas de la siguiente manera: Suposición 1: el modelo calcula los SCF, los cuales resultarán en valores muy por debajo de la unidad para compuestos tipo *sandwich*. Estos factores, que siempre son menores que 1.0, reducen los módulos de corte transversal de los materiales de todas las capas, aproximándolos a los valores de los módulos de corte transversal del núcleo. Suposición 2: las deformaciones membranales y de flexión del MITC4 se calculan de la forma usual a partir de los desplazamientos y rotaciones del elemento AIZ. Cada capa del panel aporta a la rigidez total. En general, los módulos elásticos en el plano de las láminas exteriores son mucho mayores que los mismos módulos del núcleo. De aquí que podamos asumir que las láminas soportan los

momentos y las fuerzas en el plano. Suposición 3: el término de la energía por flexión para los paneles con una razón  $L/h$  grande predomina sobre el término de la energía de corte transversal. El elemento MITC4 previene el bloqueo en este tipo de geometrías. Cuando la razón  $L/h$  es grande es posible inhabilitar el cálculo *ad hoc* de los SCF, para hacer  $\kappa_{23} = \kappa_{13} = 1$ , ya que bajo estas condiciones el modelo es muy poco sensible a cambios en los SCF (ver los resultados de la Fig. 4.14).

En la Tabla 4.2 se aprecian las suposiciones para los valores de las constantes de un material ortótropo para un panel tipo *honeycomb*, en donde las propiedades de las láminas exteriores pueden ser todas diferentes de cero. Para el núcleo, una práctica común es modelar con la mayoría de las propiedades cercanas a cero, a excepción de los módulos de corte  $G_{23}$  y  $G_{13}$ , los cuales aportan la rigidez al corte transversal para el panel completo.

Láminas	Núcleo
$E_1 \neq 0$	$E_1 \approx 0$
$E_2 \neq 0$	$E_2 \approx 0$
$E_3 \neq 0^*$	$E_3 \neq 0^*$
$\nu_{12} \neq 0$	$\nu_{12} \approx 0$
$\nu_{23} \neq 0^*$	$\nu_{23} \approx 0^*$
$\nu_{13} \neq 0^*$	$\nu_{13} \approx 0^*$
$G_{12} \neq 0$	$G_{12} \approx 0$
$G_{23} \neq 0$	$G_{23} \neq 0$
$G_{13} \neq 0$	$G_{13} \neq 0$

Tabla 4.2: Plantilla de propiedades de los materiales de un panel con núcleo de *honeycomb*.  
 \*Constantes que se suministran en casos donde existen propiedades para un modelo de material 3D.

Las suposiciones para el material que se acaban de presentar han demostrado brindar soluciones razonables en aplicaciones prácticas de ingeniería [28].

### 4.3. Casos de prueba para compuestos tipo *sandwich*

El objetivo de esta sección es probar la capacidad de cálculo del elemento de varias capas para la simulación de compuestos laminares gruesos tipo *sandwich* cuyo núcleo

soporta las cargas de corte transversal.

### 4.3.1. Viga compuesta con carga de flexión de tres puntos

Consiste en una viga compuesta de 7 capas, simplemente apoyada en A y B (ver Fig. 4.6), con una carga de 10 N/mm aplicada en C ( $x = 25$ ,  $z = 1$ ). Todas las capas son del mismo material, orientadas alternadamente en ángulos de 0 y 90 grados. Material:  $E_1 = 100$  GPa,  $E_2 = 5$  GPa,  $E_3 = 5$  GPa,  $\nu_{12} = 0,4$ ,  $\nu_{13} = 0,3$ ,  $\nu_{23} = 0,3$ ,  $G_{12} = 3$  GPa,  $G_{13} = 2$  GPa,  $G_{23} = 2$  GPa. En la Tabla 4.3 se presentan los resultados para el desplazamiento vertical del punto E, mientras que en la Fig. 4.7 la impresión de los desplazamientos nodales para la malla de 4x20 elementos.

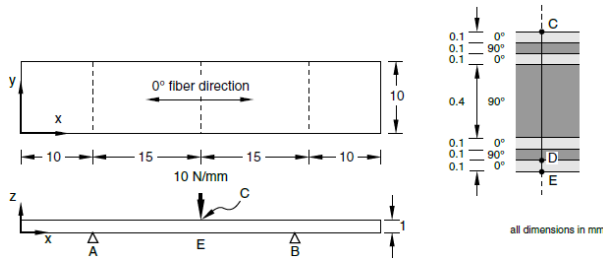


Figura 4.6: Viga de 7 capas.

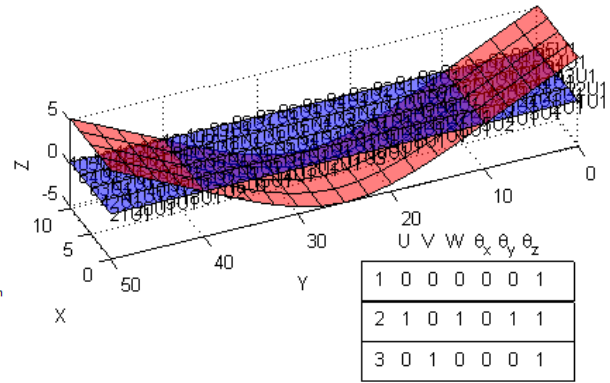


Figura 4.7: Desplazamientos.

Modelo	$w_E$ SCF=1	$w_E$ SCF $\kappa_{23}, \kappa_{13}$	$w_E$ FEM SCF/ $w_E$ AN	Error %
Ref. [27]	-1.06	N/A	N/A	N/A
Esta tesis (1x4)	-0.8016	-0.8118	0.7658	-23.4151
Esta tesis (2x10)	-1.0173	-1.0268	0.9687	-3.1321
Esta tesis (4x20)	-1.0427	-1.0525	0.9929	-0.7075

Tabla 4.3: Soluciones viga compuesta de 7 capas. SCF  $\kappa_{23}=0.7200$ ,  $\kappa_{13}=0.8857$ .

Debido a que los módulos de corte transversal son iguales para todas las capas la incidencia de los SCF sobre la solución de desplazamientos es baja.



### 4.3.2. Cáscara tipo sandwich de tres capas con carga de presión normal

Un panel tipo sandwich con los cuatro bordes simplemente apoyados es sometido a una carga de presión uniforme de 100 psi. Las constantes a ingresar para el modelo tipo cáscara se pueden hallar en las Refs. [45] y [57]. Materiales: láminas exteriores (*face sheets*):  $E_1 = 1.0e7$  psi,  $E_2 = 4.0e6$  psi,  $E_3 = 1e6$  psi,  $\nu_{12} = 0.3$ ,  $\nu_{23} = 0$ ,  $\nu_{13} = 0$ ,  $G_{12} = 1.875e6$  psi,  $G_{23} = 1.875e6$  psi,  $G_{13} = 1.875e6$  psi. Núcleo (*core*):  $E_1 = 10.0$  psi,  $E_2 = 10.0$  psi,  $E_3 = 10.0$  psi,  $\nu_{12} = 0$ ,  $\nu_{23} = 0$ ,  $\nu_{13} = 0$ ,  $G_{12} = 10.0$  psi,  $G_{23} = 1.2e4$  psi,  $G_{13} = 3.0e4$  psi. La Tabla 4.4 presenta las soluciones para  $U_z$  del punto C. La letra G indica que los módulos de corte  $G_{23}$  y  $G_{13}$  se hicieron iguales a cero para las placas exteriores para comprobar el resultado de eliminar por completo su rigidez al corte transversal, dejando esta rigidez al corte exclusivamente al núcleo (ver Sección 4.1). Esta práctica constituye una aproximación al efecto de los SCF calculados, los cuales disminuyen en gran medida los módulos de corte de las láminas. La impresión de la geometría inicial y los desplazamientos nodales se presentan en la Fig. 4.9.

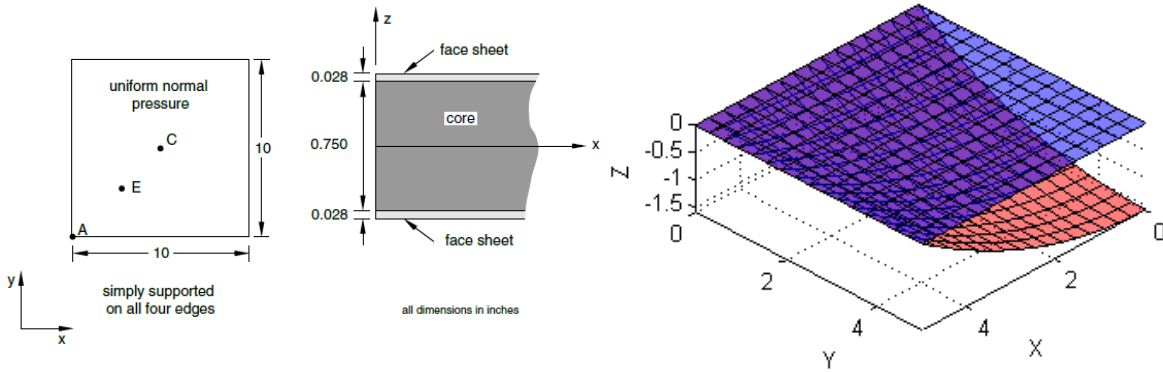


Figura 4.8: Panel tipo sandwich [57].

Figura 4.9: Desplazamientos.

Modelo	$w_c$ SCF=1	$w_c$ SCF $\kappa_{23}, \kappa_{13}$	FEM SCF/An.	Error %
Analítica Ref. [27]	-0.123	N/A	N/A	N/A
Esta tesis (16x16) G	-0.1053	N/A*	0.8561	-14.3902
Esta tesis (16x16)	-0.0637	-0.1166	0.9480	-5.2033

Tabla 4.4: Soluciones del problema del sandwich de 3 capas. SCF  $\kappa_{23}=0.1900$ ,  $\kappa_{13}=0.085$ . \*N/A debido a que se aplicó la práctica de hacer los módulos de corte transversal de las láminas iguales a cero para comparar el resultado de esta suposición con el resultado de los SCF calculados.

Los resultados indican que para este caso de prueba asumir  $G_{23} = G_{13} = 0$  para el material de las láminas exteriores con el objetivo de simular la estructura sin utilizar SCF resulta en un error de -14.39 % en comparación con un error de -48.21 % que corresponde a la solución de esta tesis con malla de 16x16 sin el uso de los SCF. Aplicar los SCF calculados brinda una solución con un error inferior. Los SCF calculados poseen valores muy lejanos al valor clásico de 5/6 que aplica para materiales homogéneos, lo cual obedece a las altas razones  $E_1/E_2$  de las capas, a la razón  $G_{13}/G_{23}$  del núcleo y a las razones entre los módulos de corte transversal y los espesores entre las láminas exteriores y el núcleo. La diferencia de error entre los resultados obtenidos con SCF=1 y los SCF calculados para este tipo de estructuras se torna muy importante a medida que la razón entre la longitud característica y el espesor del *sandwich*  $L/h$  decrece. Para este caso de prueba  $L/h = 12.4$  y la diferencia de los errores es de 43 %.

### 4.3.3. Frecuencias naturales de placa compuesta tipo sandwich con core tipo *honeycomb*

El problema consiste en hallar los primeros seis modos y frecuencias naturales de una placa formada por 3 capas. Las dos exteriores son láminas rígidas de aluminio (material isótropo) de 0.4064 mm de espesor. La capa del medio es un núcleo de aluminio tipo panal de abeja (material ortótropo) de 6.35 mm de espesor. Para modelar este panel se adopta la suposición que el núcleo sólo soporta tensiones de corte fuera del plano ( $\tau_{yz}$  y  $\tau_{xz}$ ) y que sus rigideces en el plano son cero, esto es,  $E_x = E_y = G_{xy} = 0$  [53, 54]. El esquema del problema se presenta en la Figura 4.10.

Las propiedades isótropas de las láminas son:  $E = 68.95e9$  N/m<sup>2</sup>,  $\nu = 0.33$ ,  $G = 25.92e9$

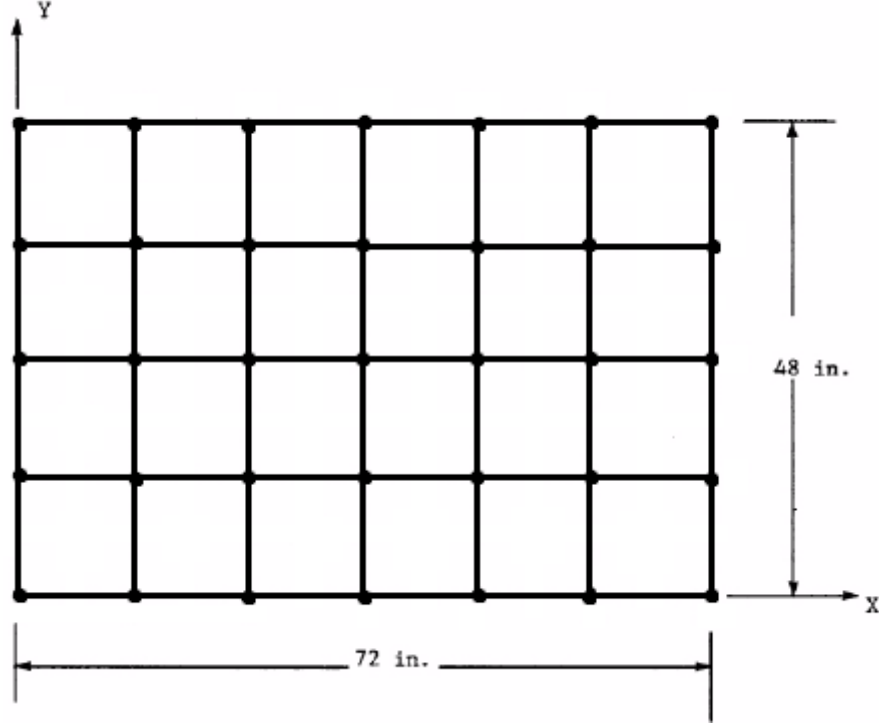


Figura 4.10: Panel tipo sandwich (3 capas). Tomada de [15].

$\text{N/m}^2$ ,  $\rho=2767.933 \text{ kg/m}^3$ . Las propiedades del núcleo son:  $G_{yz}=5.171\text{e}7 \text{ N/m}^2$ ,  $G_{xz}=1.345\text{e}8 \text{ N/m}^2$ ,  $\rho=121.8318 \text{ kg/m}^3$ ,  $\theta = 0^\circ$ .

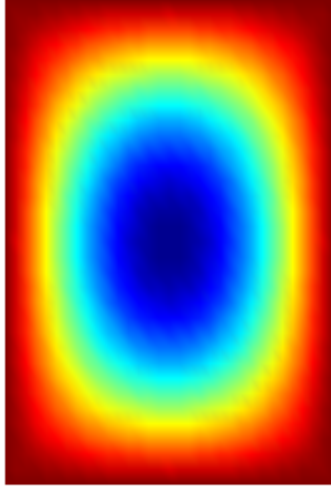
Se aplicó una condición de borde simplemente apoyado en los cuatro lados de la placa. Los desplazamientos  $U_x$  y  $U_y$ , y las rotaciones  $Rot_z$  están restringidas en todos los nodos. Los resultados del análisis de frecuencias naturales se muestra en la Tabla 4.5. El error que se indica entre paréntesis está calculado con respecto al promedio de las soluciones analíticas y experimentales suministradas por Ravilleue & Veng en la Ref. [54].

Modo	Experim. Ref. [54]	Analítica Ref. [54]	Tesis 6x4 SCF=1	Tesis 6x4 SCF $\kappa_{23}, \kappa_{13}$	Tesis 15x10 SCF=1	Tesis 15x10 SCF $\kappa_{23}, \kappa_{13}$
1	—	23.0	23.19 (0.83)	23.07 (0.30)	23.47 (2.04)	23.35 (1.52)
2	45.0	44.0	43.72 (-1.75)	43.04 (-3.28)	44.97 (1.06)	44.36 (-0.31)
3	69.0	71.0	78.41 (12.01)	77.07 (10.10)	72.95 (4.21)	72.03 (2.90)
4	78	80	83.37 (5.53)	80.00 (1.27)	81.35 (2.97)	79.07 (0.09)
5	92	91	90.83 (-0.7322)	88.52 (-3.26)	93.18 (1.84)	91.26 (-0.26)
6	125	126	116.63 (-7.07)	111.13 (-11.45)	127.44 (1.55)	123.05 (-1.95)

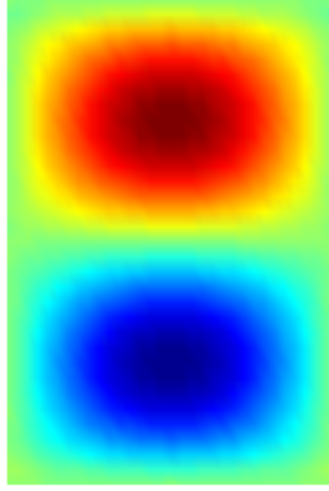
Tabla 4.5: Soluciones de placa compuesta tipo sandwich [Hz]. Los errores se muestran entre paréntesis. SCF  $\kappa_{23}=0.0174$ ,  $\kappa_{13}=0.0442$ .

La frecuencia fundamental del análisis con malla de 15x10 usando factores de corrección posee un error de -0.04 % con respecto a la solución del mismo problema presentada en la Ref. [53]. En los resultados presentados en la Tabla 4.5 para la malla de 24 elementos se puede observar que el uso de los SCF calculados no siempre mejora el resultado de las frecuencias. La suma de los valores absolutos de los errores para el análisis con SCF=1 y con SCF calculados es 27.9 y 29.66 %, respectivamente, luego el error global calculado aumenta con el uso de los SCF calculados, donde 3 de las frecuencias se deterioran con la aplicación de SCF calculados. Al pasar a la malla más fina de 150 elementos, se observa que los errores globales con SCF=1 y con SCF calculados son 13.67 y 7.03 %, respectivamente. En este caso introducir SCF calculados mejora la solución global de las frecuencias naturales, y sólo el cálculo de la sexta frecuencia se deteriora con la aplicación de SCF calculados. Cabe también destacar que la mayor diferencia de errores entre cálculos con SCF=1 y SCF calculados es 3.5 %, y se presenta para el modo 6 de la malla de 15x10 elementos. Esto permite concluir que, para este caso de prueba, la sensibilidad del modelo a la aplicación de los SCF calculados es baja en comparación con la misma diferencia de errores del caso de la sección 4.3.2, donde el mismo dato asciende a 43 %. La diferencia

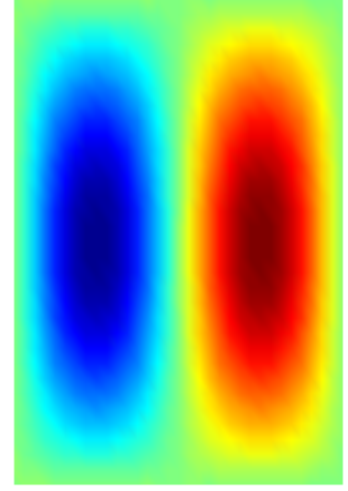
de sensibilidad entre estos dos casos corresponde con la diferencia de las razones  $L/h$ . Para el material tipo *sandwich* de la sección 4.3.2  $L/h = 12.4$ , mientras que para el caso de esta sección  $L/h = 170.3$ . La importancia de la razón  $L/h$  en materiales tipo *sandwich* será estudiada con mayor detalle en la sección 4.3.4. Los modos de vibración que corresponden a las frecuencias presentadas en la Tabla 4.5 se muestran en la Fig. 4.11.



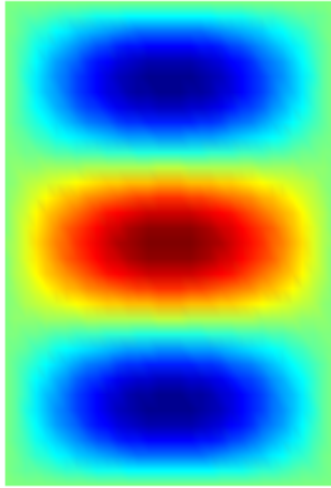
(a) Modo 1, 23.35 Hz.



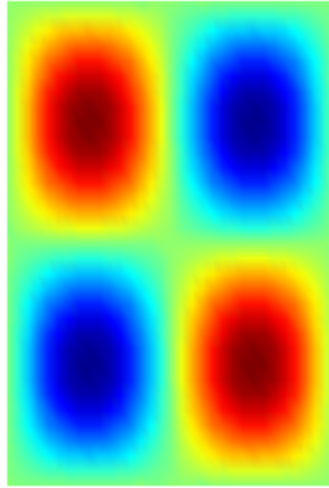
(b) Modo 2, 44.36 Hz.



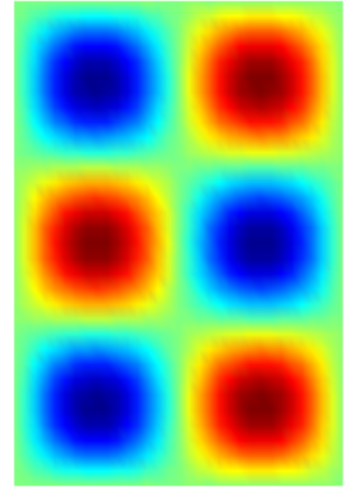
(c) Modo 3, 72.03 Hz.



(d) Modo 4, 79.07 Hz.



(e) Modo 5, 91.26 Hz.



(f) Modo 6, 123.05 Hz.

Figura 4.11: Modos de vibración de panel tipo *sandwich* con núcleo de *honeycomb*. Matriz de masa diagonalizada. Malla de 15x10 elementos, con SCF.

#### 4.3.4. Frecuencias Naturales de panel tipo *sandwich* de capas isótropas

Este caso de prueba no se compara con una solución analítica sino con modelos de elementos finitos tipo cáscara lineales de cuatro nodos implementados en los códigos de cálculo de ADINA (MITC4) y NX-NASTRAN (CQUAD4); este último a través de la interfaz de usuario FEMAP. El problema consiste en hallar las frecuencias naturales de un panel rectangular tipo *sandwich* de 1 x 0.7 m, donde los nodos sobre los cuatro bordes tienen la condición de borde  $U_x = U_y = U_z = 0$ . La razón entre los módulos elásticos y de corte de las láminas exteriores y el núcleo es  $E_l/E_n = G_l/G_n = 76.6$  y la razón entre sus densidades es  $\rho_l/\rho_n = 36.6$ . Las propiedades de las láminas son:  $E_l = 7.1 \times 10^{10}$  N/m<sup>2</sup>,  $\nu_l = 0.33$ ,  $\rho_l = 2640$  kg/m<sup>3</sup>. Las propiedades del núcleo son:  $E_n = 9.27 \times 10^8$  N/m<sup>2</sup>,  $\nu_n = 0.33$ ,  $\rho_n = 72.083$  kg/m<sup>3</sup>. Se hallarán las frecuencias naturales para espesores totales de 0.07, 0.03254 y 0.0003254 m, manteniendo constantes las fracciones de espesor de las láminas y el núcleo en valores de 0.039 y 0.922, respectivamente. Para modelar con ADINA y FEMAP con NX-NASTRAN se usaron mallas de 32x24 elementos, mientras que el modelo de esta tesis usó mallas de 30x20 elementos. Los resultados se observan en las Fig. 4.12 a 4.14. Debido a que las propiedades de los materiales y las fracciones de espesor permanecen constantes, también los SCF permanecen constantes en un valor  $\kappa = 0.1447$ .

En la Fig. 4.12 se aprecian las primeras diez frecuencias naturales del panel calculadas con el código escrito en esta tesis con y sin SCF, usando ADINA con y sin SCF, y usando FEMAP con NX-NASTRAN con SCF.

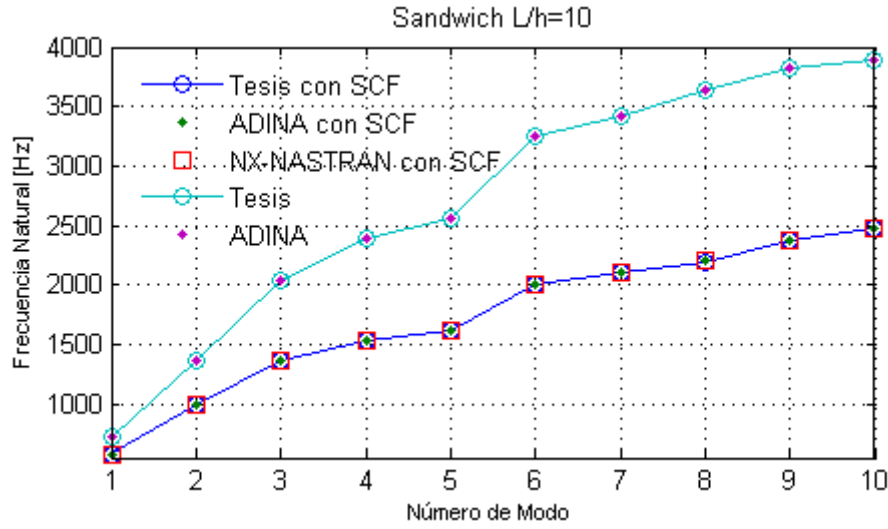


Figura 4.12: Primeras diez frecuencias naturales de panel tipo *sandwich*.  $L/h=10$ . SCF  $\kappa_{23} = \kappa_{13} = 0.1447$ .

Es posible apreciar que para razones largo/espesor  $L/h = 10$ , es decir, un panel grueso, el uso de los SCF cambia mucho el cálculo de frecuencias naturales. Sin SCF los módulos de corte fuera del plano que más aportan a la rigidez del panel son los correspondientes a las láminas, produciendo un panel más rígido y con frecuencias más altas que usando SCF. En la Fig. 4.13 se aprecia que una razón  $L/h=21.5$  continúa evidenciando diferencias importantes entre las soluciones calculadas con y sin SCF.

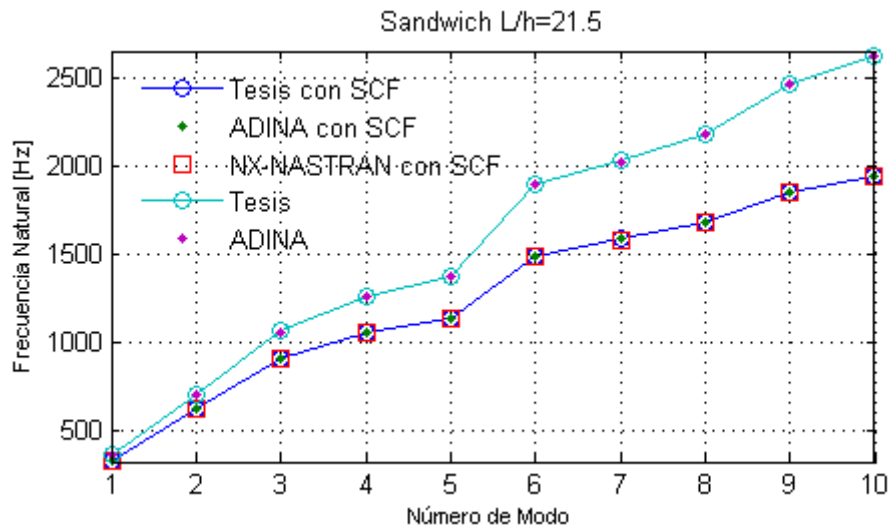


Figura 4.13: Primeras diez frecuencias naturales de panel tipo *sandwich*.  $L/h=21$ . SCF  $\kappa_{23} = \kappa_{13} = 0.1447$ .

Finalmente, en la Fig. 4.14, para  $L/h=2151$ , es decir, para un panel muy delgado, las frecuencias calculadas usando SCF prácticamente se superponen sobre los resultados hallados sin el uso de los SCF.

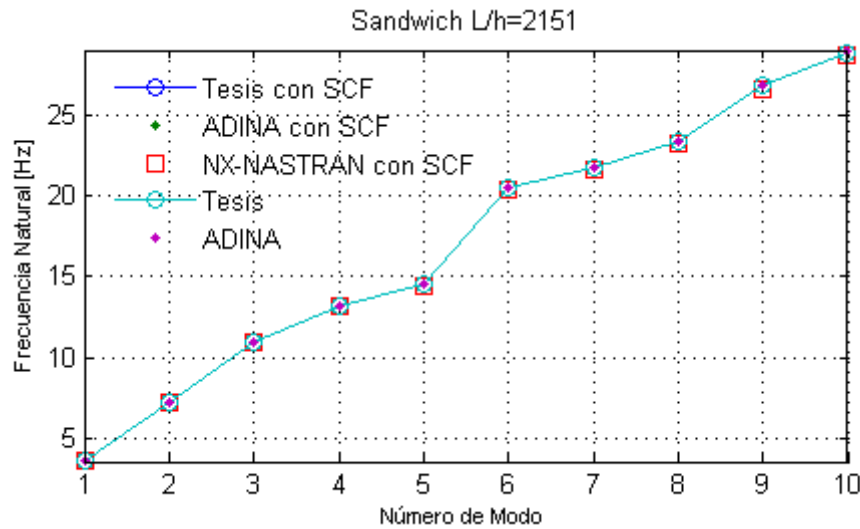


Figura 4.14: Primeras diez frecuencias naturales de panel tipo *sandwich*.  $L/h=2151$ . SCF  $\kappa_{23} = \kappa_{13} = 0.1447$ .

Adicionalmente, se encuentra que el error entre las soluciones calculadas con y sin SCF tienden a incrementarse con el aumento del modo, tal como se observa en la Tabla 4.6. Este comportamiento también se presenta en el cálculo de vibración de vigas, tal como se comentó al final de la sección 3.5.1. El error relativo porcentual ha sido calculado según la Ec. 2.62 usando los resultados de esta tesis con y sin SCF.



Modo	L/h=10	L/h=21.5	L/h=2151
1	24.37	8.40	0.0025
2	38.10	13.02	0.0031
3	50.17	16.39	0.0026
4	55.75	19.39	0.0035
5	58.50	21.43	0.0043
6	61.58	27.58	0.0055
7	62.68	28.00	0.0044
8	65.71	29.51	0.0043
9	61.33	33.15	0.0057
10	57.56	35.00	0.0067

Tabla 4.6: Evolución de error en cálculo de frecuencias naturales con y sin SCF para diferentes razones L/h (con base en resultados numéricos de esta tesis).

# Capítulo 5

## Conclusiones

- Se implementó el elemento finito tipo cáscara MITC4 para modelar materiales compuestos laminares. El modelo admite materiales isótropos y ortótropos con número ilimitado de capas, asignar direcciones a los materiales y usar factores de corrección de energía de corte transversal (SCF) para aumentar la exactitud de los cálculos. El código escrito permite imponer cargas nodales y cargas de presión para calcular desplazamientos, componentes de deformaciones y tensiones, tensiones de Von Mises, frecuencias naturales y modos de vibración, y permite imprimir la malla de la superficie media deformada y sin deformar, al igual que los modos de vibración.
- Se implementó la formulación para el cálculo de la matriz de masa diagonalizada de Hinton, Rock & Zienkiewicz para un elemento rectangular de cuatro nodos que tiene en cuenta las inercias de masa asociadas a los grados de libertad rotacionales. No se tuvieron en cuenta consideraciones especiales para la distorsión de los elementos.
- Se escribió un código en lenguaje Matlab para los ejercicios numéricos de la tesis. Los resultados se compararon con soluciones numéricas de simulaciones realizadas en los software comerciales ADINA y FEMAP con NX Nastran. Adicionalmente, se adoptaron diversos casos de prueba con solución analítica para estructuras isótropas y ortótropas de una y varias capas, donde algunos casos incluyeron variaciones en la orientación de las capas. Una parte de estos casos se destinaron a problemas estáticos lineales para comprobar los cálculos de la matriz de rigidez, mientras que otra parte al cálculo de frecuencias naturales y modos de vibración para comprobar, adicionalmente, el cálculo de la matriz de masa diagonalizada. Los resultados

obtenidos se consideran satisfactorios.

- Se estudiaron los SCF calculados a partir de la igualación de energías de corte transversal asumiendo la hipótesis de flexión cilíndrica. El cálculo de los SCF en compuestos laminares es función de la orientación del material de cada capa, de la ortotropía de cada capa dada por  $E_1/E_2$  y  $G_{13}/G_{23}$ . En compuestos tipo *sandwich* también son función de las razones entre los módulos de corte transversal de las láminas exteriores y del núcleo, al igual que de la razón entre sus espesores  $h_l/h_n$ . Los SCF cobran especial importancia en compuestos laminares tipo *sandwich* cuando los módulos de las láminas exteriores  $G_{13l}$  y  $G_{23l}$  son diferentes de cero y mucho mayores que los mismos módulos del núcleo  $G_{13n}$  y  $G_{23n}$ , donde el efecto más notorio de los SCF es la disminución de la rigidez al corte transversal de las láminas a valores cercanos a la rigidez al corte transversal del núcleo.
- Los valores de los SCF para estructuras compuestas de varias capas son diferentes de los SCF calculados para estructuras homogéneas. Por otro lado, para materiales de una o varias capas del mismo material isótropo y para materiales ortótropos de una capa el cálculo de los SCF coincide siempre con el valor clásico  $\kappa_{13} = \kappa_{23} = \kappa = 5/6$ . El uso de los SCF se considera esencial para modelos de elementos finitos que asumen deformaciones por corte transversal constantes a través del espesor.
- Para el cálculo de frecuencias naturales en paneles tipo *sandwich* el uso de los SCF es también esencial. El error en los resultados al usar o no los SCF es función de la razón largo/espesor total,  $L/h$ . Para paneles gruesos el error puede ser muy grande, y tiende a incrementarse con el número del modo de vibración. Por otro lado, para paneles muy delgados, los SCF parecen no tener un efecto importante sobre los resultados, dado que en materiales delgados la energía de deformación por flexión predomina sobre la energía de corte.

# Apéndice A

## Transformaciones útiles

Podemos usar las siguientes herramientas para transformar las componentes de las deformaciones, tensiones y del tensor constitutivo en notación de Voight de un sistema de coordenadas a otro. Para ello definiremos primero la matriz  $Q$  de transformación, cuyas componentes cambian dependiendo de la dirección en que se realice la transformación (ver [50], pág. 307).

$$Q = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1 m_1 & m_1 n_1 & n_1 l_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2 m_2 & m_2 n_2 & n_2 l_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & l_3 m_3 & m_3 n_3 & n_3 l_3 \\ 2l_1 l_2 & 2m_1 m_2 & 2n_1 n_2 & l_1 m_2 + m_1 l_2 & m_1 n_2 + n_1 m_2 & n_1 l_2 + l_1 n_2 \\ 2l_2 l_3 & 2m_2 m_3 & 2n_2 n_3 & l_2 m_3 + m_2 l_3 & m_2 n_3 + n_2 m_3 & n_2 l_3 + l_2 n_3 \\ 2l_1 l_3 & 2m_1 m_3 & 2n_1 n_3 & m_1 l_3 + l_1 m_3 & n_1 m_3 + m_1 n_3 & l_1 n_3 + n_1 l_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

### A.1. Deformaciones convectivas a cartesianas

Aplica sólo para transformar del sistema convectivo a un sistema cartesiano cualquiera. Si partimos de la expresión tensorial,

$$\varepsilon_{kl} = \tilde{\varepsilon}_{ij} (\underline{g}^i \cdot \underline{e}_k) (\underline{g}^j \cdot \underline{e}_l) \quad (\text{A.2})$$

obtenemos:

$$l_1 = \underline{g}^r \cdot e_x \quad m_1 = \underline{g}^s \cdot e_x \quad n_1 = \underline{g}^t \cdot e_x \quad (\text{A.3})$$

$$l_2 = \underline{g}^r \cdot e_y \quad m_1 = \underline{g}^s \cdot e_y \quad n_1 = \underline{g}^t \cdot e_y \quad (\text{A.4})$$

$$l_3 = \underline{g}^r \cdot e_z \quad m_1 = \underline{g}^s \cdot e_z \quad n_1 = \underline{g}^t \cdot e_z \quad (\text{A.5})$$

Nótese que el sistema de partida (para transformar deformaciones) tiene bases constantes a lo largo de las columnas. Partiendo de  $\tau_r = C_r \varepsilon_r$  y  $\tau_x = C_x \varepsilon_x$ , y usando  $C_r = Q^T C_x Q$  puedo llegar a  $\tau_r = Q^T \tau_x$ . En resumen,

$$\varepsilon_x = Q \varepsilon_r \quad (\text{A.6})$$

$$C_r = Q^T C_x Q \quad (\text{A.7})$$

$$\tau_r = Q^T \tau_x \quad (\text{A.8})$$

## A.2. Deformaciones cartesianas a convectivas

Aplica para transformar de un sistema cartesiano cualquiera al sistema convectivo. Si partimos de,

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{kl} (\underline{g}_i \cdot \underline{e}_k) (\underline{g}_j \cdot \underline{e}_l) \quad (\text{A.9})$$

obtenemos:

$$l_1 = \underline{g}_r \cdot e_x \quad m_1 = \underline{g}_r \cdot e_y \quad n_1 = \underline{g}_r \cdot e_z \quad (\text{A.10})$$

$$l_2 = \underline{g}_s \cdot e_x \quad m_2 = \underline{g}_s \cdot e_y \quad n_2 = \underline{g}_s \cdot e_z \quad (\text{A.11})$$

$$l_3 = \underline{g}_t \cdot e_x \quad m_3 = \underline{g}_t \cdot e_y \quad n_3 = \underline{g}_t \cdot e_z \quad (\text{A.12})$$

Nótese que el sistema de partida (para transformar deformaciones) tiene bases constantes a lo largo de las columnas. Con un procedimiento similar al de la sección anterior obtenemos:

$$\varepsilon_r = Q\varepsilon_x \quad (\text{A.13})$$

$$C_x = Q^T C_r Q \quad (\text{A.14})$$

$$\tau_x = Q^T \tau_r \quad (\text{A.15})$$

### A.3. Deformaciones cartesianas a cartesianas

Aplica para transformar entre dos sistemas cartesianos. Si partimos de,

$$\hat{\varepsilon}_{mn} = \varepsilon_{kl} (\hat{\underline{e}}_m \cdot \underline{e}_k) (\hat{\underline{e}}_n \cdot \underline{e}_l) \quad (\text{A.16})$$

obtenemos:

$$l_1 = \hat{\underline{e}}_x \cdot \underline{e}_x \quad m_1 = \hat{\underline{e}}_x \cdot \underline{e}_y \quad n_1 = \hat{\underline{e}}_x \cdot \underline{e}_z \quad (\text{A.17})$$

$$l_2 = \hat{\underline{e}}_y \cdot \underline{e}_x \quad m_1 = \hat{\underline{e}}_y \cdot \underline{e}_y \quad n_1 = \hat{\underline{e}}_y \cdot \underline{e}_z \quad (\text{A.18})$$

$$l_3 = \hat{\underline{e}}_z \cdot \underline{e}_x \quad m_1 = \hat{\underline{e}}_z \cdot \underline{e}_y \quad n_1 = \hat{\underline{e}}_z \cdot \underline{e}_z \quad (\text{A.19})$$

Nótese que el sistema de partida (para transformar deformaciones) tiene bases constantes a lo largo de las columnas. Con un procedimiento similar al de las secciones anteriores obtenemos:

$$\hat{\varepsilon}_x = Q\varepsilon_x \quad (\text{A.20})$$

$$C_x = Q^T \hat{C}_x Q \quad (\text{A.21})$$

$$\tau_x = Q^T \hat{\tau}_x \quad (\text{A.22})$$

Si se utiliza la Ec. A.1 para transformar la relación constitutiva del sistema ortótropo al sistema cartesiano local para tener en cuenta en el modelo la rotación de las capas del material es necesario recordar que si el ángulo de la capa es  $\beta$  grados a partir del eje local el ángulo que se debe rotar la relación constitutiva es  $-\beta$ .

Es importante remarcar que es equivalente rotar la relación constitutiva del sistema ortótropo al local como propone Oñate (es decir, usando la matriz de rotación) y luego transformarla del sistema local al convectivo que transformarla directamente del sistema ortótropo (de ejes A,B,C) al convectivo.

# Apéndice B

## Resultados adicionales

### B.1. Prueba de la parcela para Flexión

Para la Fig. B.1  $W=-5.7143e-5$  para los nodos 7 y 8 (momento en  $\beta$ ) como para los nodos 1 y 7 (momento en  $\alpha$ ), solución que corresponde con la solución analítica para la deflexión máxima de una viga empotrada, que es ([68], pág. 194),

$$\delta_{max} = -\frac{Ml^2}{2EI} \quad \text{con} \quad M = 2 \quad (B.1)$$

Al reducir el espesor a 0.001 la deflexión  $W=-5.7143e4$  para los mismos nodos, la cual también corresponde con la solución analítica.

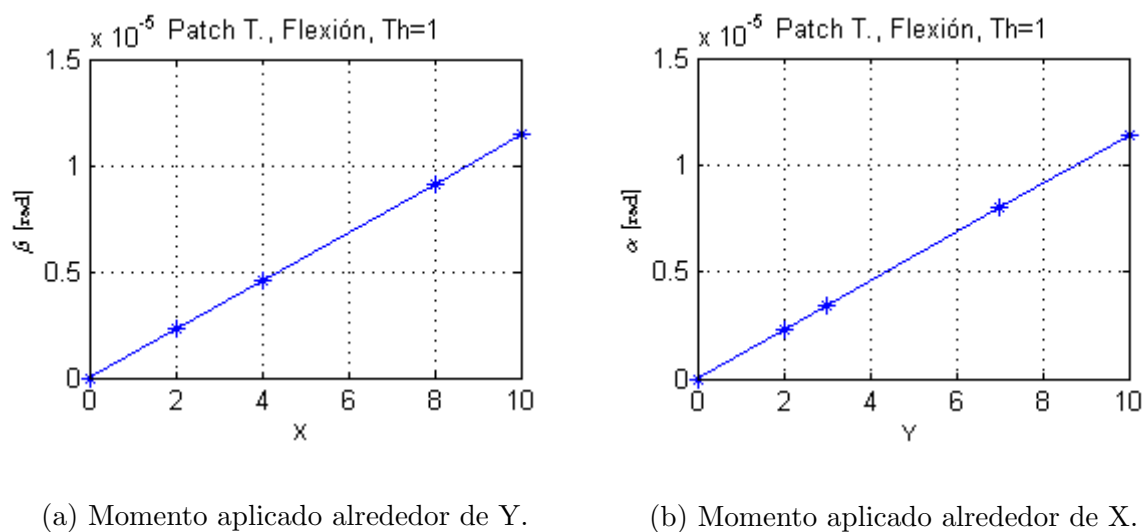
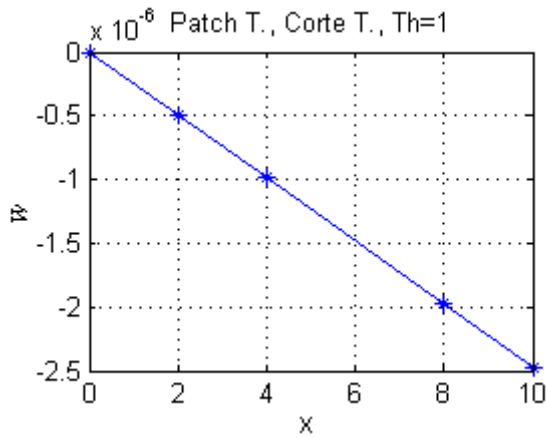


Figura B.1: Distribución lineal de rotaciones para Patch Test de Flexión con SCF=1.0.

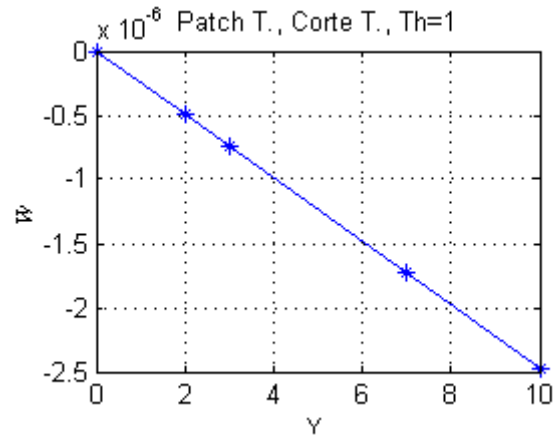


## B.2. Prueba de la parcela para Corte Transversal

La deflexión máxima para una fuerza aplicada en los nodos 7 y 8, al igual que aplicada en los nodos 1 y 7, para un espesor de 1 es  $W=-2.4762e-6$ . Para un espesor de 0.001 la deflexión  $W=-2.4762e-3$ .



(a) Fuerza aplicada a nodos 7 y 8.



(b) Fuerza aplicada a nodos 1 y 7.

Figura B.2: Distribución lineal de desplazamientos para Patch Test de Corte Transversal con SCF=1.0.

# Apéndice C

## Conceptos básicos

### C.1. Bases convectivas

Los vectores base covariantes del sistema convectivo en un punto son:

$$\underline{g}_i = \frac{\partial z^\alpha}{\partial \theta^i} \underline{e}_\alpha \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{C.1})$$

$$\underline{g}_1 = \frac{\partial x}{\partial r} \underline{e}_x + \frac{\partial y}{\partial r} \underline{e}_y + \frac{\partial z}{\partial r} \underline{e}_z = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial z}{\partial r} \end{bmatrix} \quad (\text{C.2})$$

$$\underline{g}_2 = \frac{\partial x}{\partial s} \underline{e}_x + \frac{\partial y}{\partial s} \underline{e}_y + \frac{\partial z}{\partial s} \underline{e}_z = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial z}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (\text{C.3})$$

$$\underline{g}_3 = \frac{\partial x}{\partial t} \underline{e}_x + \frac{\partial y}{\partial t} \underline{e}_y + \frac{\partial z}{\partial t} \underline{e}_z = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} \quad (\text{C.4})$$

Los vectores base contravariantes del sistema convectivo se describen así:

$$\underline{g}^i = g^{ij} \underline{g}_j \quad (\text{C.5})$$

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \cdot g_1 & g_1 \cdot g_2 & g_1 \cdot g_3 \\ g_2 \cdot g_1 & g_2 \cdot g_2 & g_2 \cdot g_3 \\ g_3 \cdot g_1 & g_3 \cdot g_2 & g_3 \cdot g_3 \end{bmatrix} \quad (\text{C.6})$$

$$g^{ij} = [g_{ij}]^{-1} \quad (\text{C.7})$$

$$\underline{g}^1 = g^{11} \underline{g}_1 + g^{12} \underline{g}_2 + g^{13} \underline{g}_3 \quad (\text{C.8})$$

$$\underline{g}^2 = g^{21} \underline{g}_1 + g^{22} \underline{g}_2 + g^{23} \underline{g}_3 \quad (\text{C.9})$$

$$\underline{g}^3 = g^{31} \underline{g}_1 + g^{32} \underline{g}_2 + g^{33} \underline{g}_3 \quad (\text{C.10})$$

# Apéndice D

## Interpolaciones

### D.1. Geometría

La geometría del elemento de cáscara está descrita por [19]:

$${}^t x_i = \sum_{k=1}^4 h_k {}^t x_i^k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^4 a_k h_k {}^t V_{ni}^k \quad (\text{D.1})$$

Las derivadas se expresan como:

$$\frac{\partial x_i}{\partial r_j} = \sum_{k=1}^4 \frac{\partial h_k}{\partial r_j} \left[ x_i^k + \frac{t}{2} a_k V_{ni}^k \right] \quad \text{para } x_i = x, y, z \text{ y } r_i = r, s. \quad (\text{D.2})$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 a_k h_k V_{ni}^k \quad \text{para } x_i = x, y, z. \quad (\text{D.3})$$

### D.2. Desplazamientos

Siguiendo la notación y los desarrollos de la Referencia [9]:

$$u_i = {}^1 x_i - {}^o x_i = \sum_{k=1}^4 h_k u_i^k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^4 a_k h_k V_{ni}^k \quad (\text{D.4})$$

Donde

$$V_n^k = {}^1V_n^k - {}^oV_n^k = \begin{bmatrix} V_{nx}^k \\ V_{ny}^k \\ V_{nz}^k \end{bmatrix} \quad (\text{D.5})$$

Las componentes de  $V_n^k$  pueden expresarse en términos de rotaciones alrededor de dos vectores unitarios con origen en el nodo  $k$ . Estos se definen como:

$${}^oV_1^k = \frac{e_y \times {}^oV_n^k}{\|e_y \times {}^oV_n^k\|} \quad (\text{D.6})$$

Cuando  ${}^oV_n^k$  es paralelo a  $e_y$  se hace  ${}^oV_1^k = e_z$ . Luego,

$${}^oV_2^k = {}^oV_n^k \times {}^oV_1^k \quad (\text{D.7})$$

Si  $\alpha_k$  y  $\beta_k$  son las rotaciones de  ${}^oV_n^k$  alrededor de  ${}^oV_1^k$  y  ${}^oV_2^k$ , respectivamente, y tenemos en cuenta que  $\alpha_k$  y  $\beta_k$  son ángulos pequeños obtenemos:

$$V_n^k = -{}^oV_2^k \alpha_k + {}^oV_1^k \beta_k \quad (\text{D.8})$$

Se demostrará realizando una primera rotación de  ${}^oV_n^k$  alrededor de  ${}^oV_2^k$  y una segunda alrededor de  ${}^oV_1^k$ . Las componentes de  ${}^1V_n^k$  tras la primera rotación serán  $(A_1, B_1, C_1)$ , y tras la segunda rotación serán  $(A_2, B_2, C_2)$ , correspondientes al sistema ortonormal formado por  ${}^oV_1^k$ ,  ${}^oV_2^k$  y  ${}^oV_n^k$ . Tras la primera rotación obtenemos:

$$A_1 = \sin \beta \quad B_1 = 0 \quad C_1 = \cos \beta \quad (\text{D.9})$$

Tras la segunda rotación obtenemos:

$$A_2 = 0 \quad B_2 = \sin \alpha \cdot C_1 = \sin \alpha \cdot \cos \beta \quad C_2 = \cos \alpha \cdot C_1 = \cos \alpha \cdot \cos \beta \quad (\text{D.10})$$

Ahora se expresa  ${}^1V_n^k$  como una combinación lineal de los vectores base y las componentes  $A$ ,  $B$  y  $C$  halladas. Tener en cuenta que las rotaciones se desarrollaron según la regla de la mano derecha, donde la componente  $B_2$  va en sentido negativo del eje  ${}^oV_2^k$ :

$${}^1V_n^k = A_1 {}^oV_1^k + (-B_2) {}^oV_2^k + C_2 {}^oV_n^k \quad (\text{D.11})$$

Teniendo en cuenta que para ángulos pequeños  $\sin \alpha \approx \alpha$  y  $\cos \alpha \approx 1 - \alpha^2/2$ ,

$${}^1V_n^k = {}^oV_1^k \beta_k - {}^oV_2^k \alpha_k + \alpha \left( \frac{\beta_2^2}{2} \right) {}^oV_2^k + {}^oV_n^k \left[ 1 - \left( \frac{\beta_k^2}{2} + \frac{\alpha_k^2}{2} \right) + \frac{\alpha^2 \beta^2}{4} \right] \quad (\text{D.12})$$

Dado que los ángulos son pequeños, al aproximar los cuadrados a cero finalmente obtenemos:

$${}^1V_n^k = -{}^oV_2^k \alpha_k + {}^oV_1^k \beta_k + {}^oV_n^k \quad (\text{D.13})$$

Ecuación que puede expresarse como:

$$V_n^k = {}^1V_n^k - {}^oV_n^k = -{}^oV_2^k \alpha_k + {}^oV_1^k \beta_k \quad (\text{D.14})$$

Finalmente, los desplazamientos se pueden escribir como:

$$u_i = \sum_{k=1}^4 h_k u_i^k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^4 a_k h_k (-{}^oV_{2i}^k \alpha_k + {}^oV_{1i}^k \beta_k) \quad (\text{D.15})$$

# Apéndice E

## Tensor de deformaciones infinitesimales

El término  $\tilde{\epsilon}_{ij}|_{\text{lineal}}$  contiene las componentes del llamado tensor de deformaciones infinitesimales. Estas componentes pueden ser expresadas como,

$$\tilde{\epsilon}_{ij}|_{\text{lineal}} = \frac{1}{2} \left[ {}^0\underline{g}_i \cdot \frac{\partial \underline{U}}{\partial r_j} + {}^0\underline{g}_j \cdot \frac{\partial \underline{U}}{\partial r_i} \right] \quad (\text{E.1})$$

Debemos tener en cuenta que:

$$\frac{\partial {}^\circ \underline{X}}{\partial r_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial {}^\circ x}{\partial r_i} \\ \frac{\partial {}^\circ y}{\partial r_i} \\ \frac{\partial {}^\circ z}{\partial r_i} \end{bmatrix} \quad \frac{\partial \underline{U}}{\partial r_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r_i} \\ \frac{\partial v}{\partial r_i} \\ \frac{\partial w}{\partial r_i} \end{bmatrix} \quad (\text{E.2})$$

Si reemplazamos las Ecs. E.2 en la Ec. E.1 se obtiene una expresión general para las componentes del tensor de deformaciones infinitesimales.

$$\tilde{\epsilon}_{ij}|_{\text{lineal}} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial {}^\circ x}{\partial r_i} \frac{\partial u}{\partial r_j} + \frac{\partial {}^\circ y}{\partial r_i} \frac{\partial v}{\partial r_j} + \frac{\partial {}^\circ z}{\partial r_i} \frac{\partial w}{\partial r_j} + \frac{\partial u}{\partial r_i} \frac{\partial {}^\circ x}{\partial r_j} + \frac{\partial v}{\partial r_i} \frac{\partial {}^\circ y}{\partial r_j} + \frac{\partial w}{\partial r_i} \frac{\partial {}^\circ z}{\partial r_j} \right] \quad (\text{E.3})$$

Para los términos *ii* obtenemos:

$$\tilde{\epsilon}_{ii}|_{lineal} = \frac{\partial^o x}{\partial r_i} \frac{\partial u}{\partial r_i} + \frac{\partial^o y}{\partial r_i} \frac{\partial v}{\partial r_i} + \frac{\partial^o z}{\partial r_i} \frac{\partial w}{\partial r_i} \quad (\text{E.4})$$

### E.1. Componentes $\tilde{\epsilon}_{rr}$ y $\tilde{\epsilon}_{ss}$

Se obtienen empleando las Ecuaciones 2.25 y 2.26, multiplicando directamente por  $\partial^o x_i / \partial r_i$ .

$$\tilde{\epsilon}_{rr}|_{lineal} = \frac{\partial^o x}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^o y}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^o z}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial r} \quad (\text{E.5})$$

$$\tilde{\epsilon}_{ss}|_{lineal} = \frac{\partial^o x}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial^o y}{\partial s} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial^o z}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial s} \quad (\text{E.6})$$

### E.2. Componente $\tilde{\epsilon}_{rs}$

Aquí se puede demostrar que  $\tilde{\epsilon}_{rs} = \tilde{\epsilon}_{sr}$ .

$$\tilde{\epsilon}_{rs}|_{lineal} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^o x}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial^o y}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial^o z}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial^o x}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial^o y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial^o z}{\partial s} \right] \quad (\text{E.7})$$

### E.3. Componentes $\tilde{\epsilon}_{rt}$ y $\tilde{\epsilon}_{st}$

Aquí se puede demostrar que  $\tilde{\epsilon}_{rt} = \tilde{\epsilon}_{tr}$  y que  $\tilde{\epsilon}_{st} = \tilde{\epsilon}_{ts}$ .

$$\tilde{\epsilon}_{rt}|_{lineal} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^o x}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^o y}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^o z}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial^o x}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial^o y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial^o z}{\partial t} \right] \quad (\text{E.8})$$

$$\tilde{\epsilon}_{st}|_{lineal} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^o x}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^o y}{\partial s} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^o z}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial^o x}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s} \frac{\partial^o y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial^o z}{\partial t} \right] \quad (\text{E.9})$$



## E.4. Componentes cartesianas

Las expresiones para las deformaciones cartesianas lineales en los desplazamientos son:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{E.10})$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (\text{E.11})$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (\text{E.12})$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{E.13})$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (\text{E.14})$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (\text{E.15})$$

## E.5. Componentes Mixtas $\tilde{\epsilon}_{rt}^{MX}|_{lineal}$ y $\tilde{\epsilon}_{st}^{MX}|_{lineal}$

En el MITC4 se reemplazan las deformaciones  $\tilde{\epsilon}_{rt}$  y  $\tilde{\epsilon}_{st}$  por  $\tilde{\epsilon}_{rt}^{MX}$  y  $\tilde{\epsilon}_{st}^{MX}$ , donde:

$$\tilde{\epsilon}_{rt}^{MX} = \frac{1}{2}(1+s)\tilde{\epsilon}_{rt}^A + \frac{1}{2}(1-s)\tilde{\epsilon}_{rt}^C \quad (\text{E.16})$$

$$\tilde{\epsilon}_{st}^{MX} = \frac{1}{2}(1+r)\tilde{\epsilon}_{st}^D + \frac{1}{2}(1-r)\tilde{\epsilon}_{st}^B \quad (\text{E.17})$$

Los detalles de esta sección pueden ser hallados en [19]. Los puntos de evaluación  $P(r, s, t)$  son:

- $A(0, 1, 0)$ .
- $B(-1, 0, 0)$ .
- $C(0, -1, 0)$ .
- $D(1, 0, 0)$ .

En adelante, tendremos en cuenta que  $\tilde{\epsilon}_{rt} = \tilde{\epsilon}_{rt}|_{lineal}$  y  $\tilde{\epsilon}_{st} = \tilde{\epsilon}_{st}|_{lineal}$ , haciendo referencia a las Ecuaciones E.8 y E.9. Realizando las evaluaciones correspondientes obtenemos

los coeficientes de la matriz de deformaciones-desplazamientos que corresponden a las deformaciones de corte transversales. Primero, los términos de  $\tilde{B}$  para  $\tilde{\epsilon}_{rt}^{MX}$ .

**Nodo 1:**

$$B_{rt}^{MX}(1) = \frac{1}{32}(s+1) (a_1 V_{nx}^1 + a_2 V_{nx}^2) \quad (\text{E.18})$$

$$B_{rt}^{MX}(2) = \frac{1}{32}(s+1) (a_1 V_{ny}^1 + a_2 V_{ny}^2) \quad (\text{E.19})$$

$$B_{rt}^{MX}(3) = \frac{1}{32}(s+1) (a_1 V_{nz}^1 + a_2 V_{nz}^2) \quad (\text{E.20})$$

$$B_{rt}^{MX}(4) = -\frac{1}{32}a_1(s+1) (V_{2x}^1(x^1 - x^2) + V_{2y}^1(y^1 - y^2) + V_{2z}^1(z^1 - z^2)) \quad (\text{E.21})$$

$$B_{rt}^{MX}(5) = \frac{1}{32}a_1(s+1) (V_{1x}^1(x^1 - x^2) + V_{1y}^1(y^1 - y^2) + V_{1z}^1(z^1 - z^2)) \quad (\text{E.22})$$

**Nodo 2:**

$$B_{rt}^{MX}(6) = -B_{rt}^{MX}(1) \quad (\text{E.23})$$

$$B_{rt}^{MX}(7) = -B_{rt}^{MX}(2) \quad (\text{E.24})$$

$$B_{rt}^{MX}(8) = -B_{rt}^{MX}(3) \quad (\text{E.25})$$

$$B_{rt}^{MX}(9) = -\frac{1}{32}a_2(s+1) (V_{2x}^2(x^1 - x^2) + V_{2y}^2(y^1 - y^2) + V_{2z}^2(z^1 - z^2)) \quad (\text{E.26})$$

$$B_{rt}^{MX}(10) = \frac{1}{32}a_2(s+1) (V_{1x}^2(x^1 - x^2) + V_{1y}^2(y^1 - y^2) + V_{1z}^2(z^1 - z^2)) \quad (\text{E.27})$$

**Nodo 3:**

$$B_{rt}^{MX}(11) = \frac{1}{32}(s-1) (a_3 V_{nx}^3 + a_4 V_{nx}^4) \quad (\text{E.28})$$

$$B_{rt}^{MX}(12) = \frac{1}{32}(s-1) (a_3 V_{ny}^3 + a_4 V_{ny}^4) \quad (\text{E.29})$$

$$B_{rt}^{MX}(13) = \frac{1}{32}(s-1) (a_3 V_{nz}^3 + a_4 V_{nz}^4) \quad (\text{E.30})$$

$$B_{rt}^{MX}(14) = -\frac{1}{32}a_3(s-1) (V_{2x}^3(x^3 - x^4) + V_{2y}^3(y^3 - y^4) + V_{2z}^3(z^3 - z^4)) \quad (\text{E.31})$$

$$B_{rt}^{MX}(15) = \frac{1}{32}a_3(s-1) (V_{1x}^3(x^3 - x^4) + V_{1y}^3(y^3 - y^4) + V_{1z}^3(z^3 - z^4)) \quad (\text{E.32})$$

**Nodo 4:**

$$B_{rt}^{MX}(16) = -B_{rt}^{MX}(11) \quad (\text{E.33})$$

$$B_{rt}^{MX}(17) = -B_{rt}^{MX}(12) \quad (\text{E.34})$$

$$B_{rt}^{MX}(18) = -B_{rt}^{MX}(13) \quad (\text{E.35})$$

$$B_{rt}^{MX}(19) = -\frac{1}{32}a_4(s-1) (V_{2x}^4(x^3 - x^4) + V_{2y}^4(y^3 - y^4) + V_{2z}^4(z^3 - z^4)) \quad (\text{E.36})$$

$$B_{rt}^{MX}(20) = \frac{1}{32}a_4(s-1) (V_{1x}^4(x^3 - x^4) + V_{1y}^4(y^3 - y^4) + V_{1z}^4(z^3 - z^4)) \quad (\text{E.37})$$

Para los términos de B para  $\tilde{\epsilon}_{st}^{MX}$ .

**Nodo 1:**

$$B_{st}^{MX}(1) = \frac{1}{32}(r+1) (a_1 V_{nx}^1 + a_4 V_{nx}^4) \quad (\text{E.38})$$

$$B_{st}^{MX}(2) = \frac{1}{32}(r+1) (a_1 V_{ny}^1 + a_4 V_{ny}^4) \quad (\text{E.39})$$

$$B_{st}^{MX}(3) = \frac{1}{32}(r+1) (a_1 V_{nz}^1 + a_4 V_{nz}^4) \quad (\text{E.40})$$

$$B_{st}^{MX}(4) = -\frac{1}{32}a_1(r+1) \left( V_{2x}^1(x^1 - x^4) + V_{2y}^1(y^1 - y^4) + V_{2z}^1(z^1 - z^4) \right) \quad (\text{E.41})$$

$$B_{st}^{MX}(5) = \frac{1}{32}a_1(r+1) \left( V_{1x}^1(x^1 - x^4) + V_{1y}^1(y^1 - y^4) + V_{1z}^1(z^1 - z^4) \right) \quad (\text{E.42})$$

**Nodo 2:**

$$B_{st}^{MX}(6) = -\frac{1}{32}(r-1) \left( a_2V_{nx}^2 + a_3V_{nx}^3 \right) \quad (\text{E.43})$$

$$B_{st}^{MX}(7) = -\frac{1}{32}(r-1) \left( a_2V_{ny}^2 + a_3V_{ny}^3 \right) \quad (\text{E.44})$$

$$B_{st}^{MX}(8) = -\frac{1}{32}(r-1) \left( a_2V_{nz}^2 + a_3V_{nz}^3 \right) \quad (\text{E.45})$$

$$B_{st}^{MX}(9) = \frac{1}{32}a_2(r-1) \left( V_{2x}^2(x^2 - x^3) + V_{2y}^2(y^2 - y^3) + V_{2z}^2(z^2 - z^3) \right) \quad (\text{E.46})$$

$$B_{st}^{MX}(10) = -\frac{1}{32}a_2(r-1) \left( V_{1x}^2(x^2 - x^3) + V_{1y}^2(y^2 - y^3) + V_{1z}^2(z^2 - z^3) \right) \quad (\text{E.47})$$

**Nodo 3:**

$$B_{st}^{MX}(11) = -B_{st}^{MX}(6) \quad (\text{E.48})$$

$$B_{st}^{MX}(12) = -B_{st}^{MX}(7) \quad (\text{E.49})$$

$$B_{st}^{MX}(13) = -B_{st}^{MX}(8) \quad (\text{E.50})$$

$$B_{st}^{MX}(14) = \frac{1}{32}a_3(r-1) \left( V_{2x}^3(x^2 - x^3) + V_{2y}^3(y^2 - y^3) + V_{2z}^3(z^2 - z^3) \right) \quad (\text{E.51})$$

$$B_{st}^{MX}(15) = -\frac{1}{32}a_3(r-1) \left( V_{1x}^3(x^2 - x^3) + V_{1y}^3(y^2 - y^3) + V_{1z}^3(z^2 - z^3) \right) \quad (\text{E.52})$$

**Nodo 4:**

$$B_{st}^{MX}(16) = -B_{st}^{MX}(1) \quad (\text{E.53})$$

$$B_{st}^{MX}(17) = -B_{st}^{MX}(2) \quad (\text{E.54})$$

$$B_{st}^{MX}(18) = -B_{st}^{MX}(3) \quad (\text{E.55})$$

$$B_{st}^{MX}(19) = -\frac{1}{32}a_4(r+1) \left( V_{2x}^4(x^1 - x^4) + V_{2y}^4(y^1 - y^4) + V_{2z}^4(z^1 - z^4) \right) \quad (\text{E.56})$$

$$B_{st}^{MX}(20) = \frac{1}{32}a_4(r+1) \left( V_{1x}^4(x^1 - x^4) + V_{1y}^4(y^1 - y^4) + V_{1z}^4(z^1 - z^4) \right) \quad (\text{E.57})$$

# Apéndice F

## Integración de matrices de rigidez

### F.1. Integración en sistema convectivo

Las deformaciones son derivadas con respecto a las coordenadas convectivas y la relación constitutiva es transformada también a dicho sistema.

$$\underline{\underline{K}} = \int_V \underline{\underline{\tilde{B}}}^T \underline{\underline{\tilde{C}}} \underline{\underline{\tilde{B}}} dV \quad (\text{F.1})$$

$$\tilde{C}^{ijkl} = (g^i \cdot \hat{e}_m)(g^j \cdot \hat{e}_n)(g^k \cdot \hat{e}_o)(g^l \cdot \hat{e}_p) \hat{C}^{mnop} \quad (\text{F.2})$$

Las bases del sistema local (ortogonoal) en cada punto de gauss serán definidas como:

$$\hat{e}_3 = \frac{g_3}{\|g_3\|} \quad (\text{F.3})$$

$$\hat{e}_1 = \frac{g_2 \times \hat{e}_3}{\|g_2 \times \hat{e}_3\|} \quad (\text{F.4})$$

$$\hat{e}_2 = \hat{e}_3 \times \hat{e}_1 \quad (\text{F.5})$$

La relación entre deformaciones y desplazamientos proviene de:

$$\underline{\underline{\tilde{\epsilon}}} = \underline{\underline{\tilde{B}}} \underline{\underline{U}} \quad \tilde{\tau}^{ij} = \tilde{C}^{ijkl} \tilde{\epsilon}_{kl} \quad (\text{F.6})$$

Las dimensiones de las matrices son:  $\tilde{C}$ : (5 x 5),  $\tilde{\varepsilon}$ : (5 x 1),  $\tilde{B}$ : (5 x 20),  $\underline{U}$ : (20 x 1) (ver [21]).

## F.2. Integración en sistema cartesiano local

Las deformaciones están definidas en el sistema cartesiano local y la relación constitutiva usada no requiere transformarse. La matriz de rigidez elemental para la integración en este sistema local está definida como:

$$K^e = \int_{V^e} \hat{B}^T \hat{C} \hat{B} dV \quad (F.7)$$

Para este caso, la matriz constitutiva no requiere transformarse. En el caso isótropo tenemos:

$$\hat{C} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k\frac{(1-\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k\frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (F.8)$$

A continuación se halla la matriz  $\hat{\underline{\underline{B}}}$ . La teoría se presenta en [47], pág. 619 y [70], pág. 271. El símbolo  $\hat{\cdot}$  indica el sistema cartesiano local, mientras que aquellas variables sin simbolo indican el sistema cartesiano global.

$$\hat{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{\varepsilon}} \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{B}} \cdot \underline{U}^e \quad (F.9)$$

donde,

$$Q = \begin{bmatrix} (l^x)^2 & (l^y)^2 & (l^z)^2 & l^x l^y & l^x l^z & l^y l^z \\ (m^x)^2 & (m^y)^2 & (m^z)^2 & m^x m^y & m^y m^z & m^z m^x \\ 2l^x m^x & 2l^y m^y & 2l^z m^z & (l^x m^y + l^y m^x) & (l^x m^z + l^z m^x) & (l^y m^z + l^z m^y) \\ 2l^x n^x & 2l^y n^y & 2l^z n^z & (l^x n^y + l^y n^x) & (l^x n^z + l^z n^x) & (l^y n^z + l^z n^y) \\ 2m^x n^x & 2m^y n^y & 2m^z n^z & (m^x n^y + m^y n^x) & (m^x n^z + m^z n^x) & (m^y n^z + m^z n^y) \end{bmatrix} \quad (\text{F.10})$$

La determinación de la matriz  $\underline{\underline{Q}}$  está desarrollada ampliamente en [47], pág. 620. Luego, operando con F.9 obtenemos,

$$\hat{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{U}^e = \underline{\underline{\hat{B}}} \cdot \underline{U}^e \rightarrow \underline{\underline{\hat{B}}} = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{B}} \quad (\text{F.11})$$

$$\hat{\underline{\underline{\varepsilon}}} [5 \times 20] = \underline{\underline{Q}} [5 \times 6] \cdot \underline{\underline{B}} [6 \times 20] \cdot \underline{U}^e [20 \times 1] = \underline{\underline{\hat{B}}} [5 \times 20] \cdot \underline{U}^e [20 \times 1] \quad (\text{F.12})$$

$\hat{B}$  está definida en términos de las derivadas de los desplazamientos con respecto a las coordenadas cartesianas locales  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  y  $\hat{z}$ . Se debe tener en cuenta que,

$$\hat{\tau} = \left[ \tau_{\hat{x}}, \tau_{\hat{y}}, \tau_{\hat{x}\hat{y}}, \tau_{\hat{x}\hat{z}}, \tau_{\hat{y}\hat{z}} \right]^T = \hat{C} \hat{\varepsilon} \quad \tau = \left[ \tau_x, \tau_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz} \right]^T = C \varepsilon \quad (\text{F.13})$$

$$\varepsilon = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}]^T = \left[ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right]^T \quad (\text{F.14})$$

$$\hat{\underline{\underline{\varepsilon}}} = [\varepsilon_{\hat{x}}, \varepsilon_{\hat{y}}, \gamma_{\hat{x}\hat{y}}, \gamma_{\hat{x}\hat{z}}, \gamma_{\hat{y}\hat{z}}]^T = \left[ \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}}, \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}}, \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}}, \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}}, \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{z}} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}}, \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{z}} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{y}} \right]^T \quad (\text{F.15})$$

La matriz  $\underline{\underline{B}}$  en el sistema cartesiano global posee todas las componentes de deformación, al contrario de  $\underline{\underline{\hat{B}}}$ , la cual posee sólo 5 componentes de deformación. Para obtener las derivadas con respecto al sistema cartesiano global:



$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = J^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial w}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial w}{\partial s} \\ \frac{\partial u}{\partial t} & \frac{\partial v}{\partial t} & \frac{\partial w}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial s}{\partial y} & \frac{\partial t}{\partial y} \\ \frac{\partial r}{\partial z} & \frac{\partial s}{\partial z} & \frac{\partial t}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial w}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial w}{\partial s} \\ \frac{\partial u}{\partial t} & \frac{\partial v}{\partial t} & \frac{\partial w}{\partial t} \end{bmatrix} \quad (\text{F.16})$$

Una manera alternativa de proceder es hallar las derivadas de los desplazamientos locales con respecto a las coordenadas locales en lugar de usar  $\underline{Q}$  para transformar directamente las deformaciones. Esto se realiza mediante la expresión (ver. Ref. [70]):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} = \theta^T \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \theta \quad (\text{F.17})$$

Con

$$\theta = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \quad (\text{F.18})$$

Los términos de la matriz anterior son los cosenos de los ángulos entre los siguientes ejes:

	<b>x</b>	<b>y</b>	<b>z</b>
<b>x'</b>	$l_1$	$m_1$	$n_1$
<b>y'</b>	$l_2$	$m_2$	$n_2$
<b>z'</b>	$l_3$	$m_3$	$n_3$

Tabla F.1: Cosenos directores de los ejes.

# Apéndice G

## Relaciones constitutivas

${}^t_0C_{ijrs}$  son las componentes del tensor de elasticidad. Considerando condiciones de tensión tridimensionales tenemos:

$${}^t_0C_{ijrs} = \lambda \delta_{ij} \delta_{rs} + \mu (\delta_{ir} \delta_{js} + \delta_{is} \delta_{jr}) \quad (\text{G.1})$$

$\lambda$  y  $\mu$  son las constantes de Lamé, y  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker, donde  $\delta_{ij} = 0$  para  $i \neq j$  y  $\delta_{ij} = 1$  para  $i = j$ .

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (\text{G.2})$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{G.3})$$

Las componentes del tensor elástico dadas en G.1 son idénticas a los valores dados en la siguiente ecuación:

$$C_{3D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (\text{G.4})$$

Para un material isótropo podemos obtener la siguiente relación constitutiva a partir

de la relación 3D, la suposición de tensión plana e incluyendo los términos para corte fuera del plano [9]:

$$\tau_{33} = \tau_{13} = \tau_{23} = 0 \quad \epsilon_{13} = \epsilon_{23} = 0 \quad (\text{G.5})$$

$$\hat{C} = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k\frac{(1-\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k\frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{G.6})$$

donde [35],

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} C^{1111} & C^{1122} & C^{1133} & C^{1112} & C^{1123} & C^{1113} \\ C^{2211} & C^{2222} & C^{2233} & C^{2212} & C^{2223} & C^{2213} \\ C^{3311} & C^{3322} & C^{3333} & C^{3312} & C^{3323} & C^{3313} \\ C^{1211} & C^{1222} & C^{1233} & C^{1212} & C^{1223} & C^{1213} \\ C^{2311} & C^{2322} & C^{2333} & C^{2312} & C^{2323} & C^{2313} \\ C^{1311} & C^{1322} & C^{1333} & C^{1312} & C^{1323} & C^{1313} \end{bmatrix} \quad (\text{G.7})$$

En problemas de elasticidad y plasticidad asociada el tensor  $C$  tiene las siguientes simetrías [21] (la última de la derecha es solo para materiales hiperelásticos. También la llaman simetría extendida):

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{jilk} = C_{klij} \quad (\text{G.8})$$

Las simetrías menores resultan de la simetría de los tensores de tensiones y deformaciones:

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \quad \text{luego} \quad C_{ijkl} = C_{jikl} \quad (\text{G.9})$$

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji} \quad \text{luego} \quad C_{ijkl} = C_{ijlk} \quad (\text{G.10})$$

Asumiendo la equivalencia de las derivadas parciales mixtas:

$$C_{ijkl} = C_{klij} \quad (\text{G.11})$$

# Apéndice H

## Detalles de la Implementación

El pseudocódigo del programa escrito es el siguiente:

1. Ingreso de datos de entrada: propiedades del material, matriz de coordenadas nodales, matriz de conectividad de los elementos, condiciones de borde, cargas, dirección de vectores nodales normales, etc.
2. Cálculo de espesores nodales y distancia de las capas a partir de la referencia.
3. Evaluación de matriz constitutiva de cada capa  $\hat{C}_{capa}$  en sistema ortonormal de bases  $(a, b, c)$ .
4. Rotación  $\beta$  en el plano de ejes ortótropos a cartesianos locales  $\bar{C}_{capa} = Q' \hat{C}_{capa} Q$ .
5. Cálculo de SCF a partir de  $\bar{C}_{capas}$ .
6. Aplico SCF a matriz en sistema ortótropo  $\hat{C}_{capa} \rightarrow \hat{C}_{capaSCF}$ .
7. Roto de nuevo a sistema local en el plano  $\bar{C}_{capaSCF} = Q' \hat{C}_{capaSCF} Q$ .
8. Inicia ciclo elemental.
9. Se leen coordenadas nodales.
10. Se calculan vectores nodales  $V_n^k$ ,  $V_1^k$  y  $V_2^k$  para  $k = 1, 2, 3, 4$ .
11. Si  $V_n^k$  apunta en dir. Y entonces  $V_1^k = e_y \times V_n^k$ .
12. Se halla matriz de rotación de sistemas nodales a sistema cartesiano global  $T_{rot}^k$ .

13. Se definen puntos de orientacin del material  $R_3$  y  $R_4$ .
14. Inicia ciclo de capas.
15. Se lee ángulo  $\beta_{capa}$ .
16. Inician ciclos de integración para puntos de Gauss en  $r$  y  $s$ .
17. Se evalúan funciones de forma y sus derivadas  $h_k$ ,  $\partial h_k/\partial r$  y  $\partial h_k/\partial s$ .
18. Se calcula espesor total del elemento y espesor de la capa para cada punto  $(r, s)$ ,  $a_{fRS}$  y  $l_{fRS}$ .
19. Inicia ciclo de integración en  $t$ .
20. Se calcula coordenada natural  $t$  para elemento de varias capas.
21. Se calculan derivadas globales en el PG  $\partial x/\partial r$ ,  $\partial x/\partial s, \dots$ ,  $\partial z/\partial t$ .
22. Se calcula en el PG  $J$ ,  $J^{-1}$  y  $\det J$ .
23. Se calculan en el PG bases  $g_r$ ,  $g_s$ ,  $g_t$ ,  $g^r$ ,  $g^s$ ,  $g^t$ ,  $\hat{e}_x$ ,  $\hat{e}_y$  y  $\hat{e}_z$ .
24. Se calcula en el PG las bases del sistema ortótropo  $a$ ,  $b$ ,  $c$  a partir de  $R_3$ ,  $R_4$  y  $\beta$ .
25. Se calcula matriz de rotación  $rot6$  de sistema  $a_{34}$ ,  $b_{34}$  y  $c_{34}$  a sistema cartesiano global.
26. Se rota matriz constitutiva de sistema local a global  $C_{glob} = rot6' \bar{C}_{capa} rot6$
27. Se calculan deformaciones mediante interpolación directa  $\varepsilon_{rr}^{DI}$ ,  $\varepsilon_{ss}^{DI}$ ,  $\varepsilon_{rs}^{DI}$ ,  $\varepsilon_{st}^{DI}$ ,  $\varepsilon_{rt}^{DI}$  a partir de  $\partial u/\partial r$ ,  $\partial v/\partial r, \dots$ ,  $\partial w/\partial t$ .
28. Se calculan deformaciones mediante interpolación mixta  $\varepsilon_{13}^{MX}$  y  $\varepsilon_{23}^{MX}$ .
29. Se llena la matriz  $B_{conv}$ .
30. Se transforman deformaciones (matriz  $B$ ) de sistema convectivo a cartesiano global  $B_{glob} = Q_{c2g} B_{conv}$  ( $B$  queda de  $[6 \times 24]$ ).
31. Se calcula  $K_{elem} = \sum B_{glob}^T C_{glob} B_{glob} \det(J) (l_{rs}/a_{rs}) w_r w_s w_t$ .
32. Cierran ciclos para  $t$ ,  $s$  y  $r$ .

33. Se suman masas de cada capa y masas del elemento.
34. Cierra ciclo para capas.
35. Se transforman bases nodales y se alinean con los ejes cartesianos globales  $K_t = T_{rot}^T K_{elem} T_{rot}$ .
36. Se ensambla la matriz  $K_{elem}$  a la matriz del sistema  $K_{sist}$ .
37. Se calcula la matriz de masa diagonal del elemento.
38. Se ensambla la matriz de masa diagonal a la matriz de masa del sistema.
39. Termina ciclo sobre el elemento.
40. Se ensamblan vectores elementales de carga superficial con vector de cargas nodales.
41. Se aplican condiciones de borde a las matrices de rigidez y masa del sistema.
42. Se resuelve el sistema  $K_{sist}U = R$ .
43. Se calculan deformaciones, tensiones y tensiones de Von Mises para un elemento seleccionado previamente.
44. Se calculan modos y frecuencias naturales del sistema.
45. Se imprimen geometrías, tensiones, deformaciones o modos de resonancia.

# Apéndice I

## Instrucciones de ejecución

Para correr los casos de prueba se debe abrir el archivo MainV3.m de Matlab. Con el directorio apuntando a la carpeta FEM es posible ejecutar el programa para el caso por defecto que esté activado. Los casos de prueba se encuentran listados al inicio del archivo. Para activarlos sólo se debe comentar (el texto se torna verde) la línea de código del caso de prueba activo y quitar el comentario a la línea de código del caso de interés (cambia de verde a negro). Se puede activar cualquiera de los casos de prueba.

Todos los casos son estáticos a excepción de los que se encuentran bajo el título FRECUENCIAS en la línea 79 de MainV3.m. Una vez corrido el caso de interés se pueden mirar los resultados en el *Workspace*. Los desplazamientos se pueden observar en DESP-NODALES. Si se ejecuta un caso de FRECUENCIAS, el valor de las frecuencias naturales se puede observar en el *Workspace* bajo eigFreq.

Para ejecutar casos con o sin Shear Correction se debe ingresar al archivo del caso de prueba (clic derecho, abrir) y escribir SI o NO en mat(14,1).



# Bibliografía

- [1] ABBASSIAN, F., DAWSWELL, D., AND KNOWLES, N. *NAFEMS - Selected Benchmarks for Natural Frequency Analysis*. The Intl. Assoc. for the Eng. Analysis Community, 1987.
- [2] ADINA R & D, I. *Theory and Modeling Guide. Volume I: ADINA*. ADINA R & D, Inc., 2010.
- [3] ADINA R & D, I. *ADINA Verification Manual: Report ARD 13-12*. ADINA R & D., December 2013.
- [4] AHMAD, S., IRONS, B., AND ZIENKIEWICZ, O. C. Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2 (July/September 1970), 419–451.
- [5] ARCHER, G. C., AND WHALEN, T. M. Development of rotationally consistent diagonal mass matrices for plate and beam elements. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 194 (2005), 675–689.
- [6] ASHTON, J., AND WHITNEY, J. Theory of laminated plates. *Progress in Materials Science Series, Technomic Publishing Co., Inc., Stanford, Connecticut* 4 (1970), 70.
- [7] Ship partition wall panel / sandwich / honeycomb / aluminum.  
<http://www.nauticexpo.com/prod/ayres-composite-panels/product-28043-18>
- [8] BATHE, K. J. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1982.
- [9] BATHE, K. J. *Finite Element Procedures*. Prentice-Hall, 1996.

- [10] BATHE, K. J., AND DVORKIN, E. N. A four-node plate bending element based on mindlin-reissner plate theory and a mixed interpolation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21 (1985), 367–383.
- [11] BLEVINS, R. *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*. Van Nostrand Reinhold Company, 1979.
- [12] BUCALEM, M., AND BATHE, K. Finite element analysis of shell structures. *Archives of Computational Methods in Engineering* 4, 1 (1997), 3–61.
- [13] BUCALEM, M. L., AND BATHE, K. J. Locking behavior of isoparametric curved beam finite elements. *Applied Mechanics Review* 11S, 48 (1995), 25–29.
- [14] COOK, R. D., MALKUS, D. S., AND PLESHA, M. E. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 3 ed. Jhon Wiley and Sons, 1989.
- [15] CRANES. *VPG/NISA Verification Manual*. Cranes Software Inc., 2008.
- [16] DASSAULT. *Solidworks Simulation Validation Document*. Dassault Systemes, Solidworks Corp.
- [17] DVORKIN, E. N. *On nonlinear finite element analysis of shell structures [PhD thesis]*. Massachusetts Institute of Technology.
- [18] DVORKIN, E. N. *Notes of the course: Nonlinear analysis of shells using finite elements*. Center for Industrial Research FUDETEC, Buenos Aires, Argentina, 1991.
- [19] DVORKIN, E. N., AND BATHE, K. J. A continuum mechanics based four-node shell element for general non-linear analysis. *Engineering Computations* 1 (March 1984), 77–88.
- [20] DVORKIN, E. N., AND GOLDSCHMIT, M. B. *Nonlinear Continua - Monograph*. Springer, May 2005.
- [21] DVORKIN, E. N., AND TOSCANO, R. *Finite Element Analysis of the Collapse and Post-Collapse Behavior of Steel Pipes: Applications to the Oil Industry*, 1 ed. Springer Science & Business Media, 2014.

- [22] FELIPPA, C. *Chapter 31: Lumped and Consistent Mass Matrices. Notes of the courses Introduction to Finite Element Methods (ASEN 5007)*. Colorado State Univeristy at Boulder, 2015.
- [23] FELIPPA, C., AND MILITELLO, C. Membrane triangles with corner drilling freedoms, part ii: The andes element [report no. cu-cssc-91-24b]. Tech. rep., University of Colorado, 1992.
- [24] GEYER, S. E. *Advanced Low Order Orthotropic Finite Element Formulations [Msc thesis]*. University of Pretoria, december 2000.
- [25] GUILLERMIN, O., KOJIC, M., AND BATHE, K. J. Linear and non-linear analysis of composite shells. *Proceedings of the conference STRUCOME 90, Nov., Paris, France* (1990), 1–18.
- [26] HALLQUIST, J. *LS-DYNA Theoretical Manual*. Livermore Software Tech. Corp., 1998.
- [27] HARDY, S. *NAFEMS: Composite Benchmarks*. NAFEMS, 2001.
- [28] HEXCEL. Hexweb - honeycomb sandwich design technology [publication no. agu 075b]. Tech. rep., Hexcel Composites, 2000.
- [29] HILLER, J.-F. N. *Finite Element Analysis of Shells with Layers [PhD thesis]*. Massachusetts Institute of Technology.
- [30] HINTON, E., ROCK, T., AND ZIENKIEWICZ, O. C. A note on mass lumping and related processes in the finite element method. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 4 (1976), 245–249.
- [31] HUGHES, T., LIU, W., AND LEVIT, I. *Nonlinear dynamics finite element analysis of shells. In Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*. Springer: Berlin, 151-168, 1981.
- [32] HUGHES, T. J. R. *The finite element method: Linear static and dynamic finite element analysis*. Prentice-Hall, Inc., 1987.
- [33] IOSILEVICH, A. G. *An analysis of Finite Elements for Plate Bending Problems [Msc thesis]*. Massachusetts Institute of Technology.

- [34] IRONS, B., AND RAZZAQUE, A. Experience with the patch test for convergence of finite elements. In *The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations*, A. K. Aziz, Ed. Academic Press, New York, 1972.
- [35] ITIN, Y., AND HEHL, F. The constitutive tensor of linear elasticity: Its decompositions, cauchy relations, null lagrangians, and wave propagation. *Journal of Mathematical Physics*, 54 (2013).
- [36] JONES, R. M. *Mechanics of Composite Materials*. McGraw-Hill, 1975.
- [37] JOURAWSKI, D. J. Sur la résistance dun corps prismatique et dune pièce composée en bois ou on tole de fer a une force perpendiculaire á leur longueur. *Annales des Ponts et Chaussées, Mémoires et Documents*, 3a. série 12, 2 (1856), 328–351.
- [38] KWON, Y. W., AND BANG, H. *The Finite Element Method Using Matlab*, 2 ed. CRC Press, 2000.
- [39] LAITINEN, M., LAHTINEN, H., AND SJOLIND, S. Transverse shear correction factors for laminates in cylindrical bending. *Communications in Numerical Methods in Engineering* 11 (1995), 41–47.
- [40] LEMPRIERE, B. M. Poisson’s ratio in orthotropic materials. *AIAA Journal* 6, 11 (1968), 2226–2227.
- [41] MACNEAL, R. H. Derivation of element stiffness matrices by assumed strain distributions. *Nuclear Engineering and Design* 70 (1982), 3–12.
- [42] MARINETTI, A., AND OLIVETO, G. On the evaluation of the shear correction factors: a boundary element approach. In *Proceedings of the Associazione italiana di meccanica teorica e applicata - AIMETA* (2009), AIMETA.
- [43] MATTERNS, S., AND SCHWEIZERHOF, K. Highly efficient solid-shell finite elements for dynamic applications - an implementation concept using symbolic programming. *Proceedings of the 8th International Conference on Structural Dynamics-EURODYN, Leuven, Belgium* (4-6 July 2011), 3184–3192.

- [44] MILITELLO, C., AND FELIPPA, C. A variational justification of the assumed natural strain formulation of finite elements. ii. the  $c^0$  four node plate element [contractor report 189063]. Tech. rep., NASA, 1991.
- [45] MSC. *MD Nastran - MD Demonstration Problems. Rev: 0 07/04/2010*. MSC Software, 2010.
- [46] NOOR, A., AND MATHERS, M. Finite element analysis of anisotropic plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 11 (1977), 289–307.
- [47] ONATE, E. *Structural Analysis with the Finite Element Method. Linear Statics. Vol. 2: Beams, Plates and Shells*, 1 ed. Springer, 2013.
- [48] PAGANO, N. Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates. *J. Comp. Mat.* 4 (1970), 20–34.
- [49] PANDA, S., AND NATARAJAN, R. Analysis of laminated composite shell structures by finite element method. *Computers and Structures* 14, 3-4 (1981), 225–230.
- [50] PARIS, I. *On the reliability of triangular finite elements for shells [PhD thesis]*. Université Pierre et Marie Curie.
- [51] PARK, K. C. An improved strain interpolation for curved  $c^0$  elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 22 (1986), 281–288.
- [52] RAMMERSTORFER, F. G. *Nonlinear Analysis of Shells by Finite Elements: CISM courses and lectures No. 328*. Springer-Verlag, 1992.
- [53] RAO, M. K., AND DESAI, Y. M. Analytical solutions for vibrations of laminated and sandwich plates using mixed theory. *Composite Structures*, 63 (2004), 361–373.
- [54] RAVILLE, M., AND UENG, C. Determination of natural frequencies of vibration of a sandwich plate. *Experimental Mechanics* (1967), 490–493.
- [55] REDDY, J. N. *Theory and Analysis of elastic plates*. Taylor & Francis, 1999.
- [56] SCORDELIS, A., AND LO, K. Computer analysis of cylindrical shells. *J. Amer. Concr. Inst.* 61 (1964), 539–560.
- [57] SIMULIA. *Abaqus 6.12 - Benchmarks Manual*. Simulia - Dassault Systemes, 2012.

- [58] SOEDEL, W. *Vibrations of Shells and Plates*, third ed. Marcel Dekker, Inc., 2005.
- [59] SOLIDWORKS. *COSMOS 2006: COSMOSWorks Verification*. COSMOS, 2006.
- [60] STEGMANN, J. *Finite Elements for Geometric Non-Linear Analysis of Composite Laminates and Sandwich Structures [PhD thesis]*. Institute of Mechanical Engineering, Aalborg University.
- [61] SZABÓ, B., AND BABUSKA, I. *Introduction to Finite Element Analysis: Formulation, Verification and Validation*. Wiley, 2011.
- [62] TABIEL, A., AND TANOV, R. Sandwich shell finite element for dynamic explicit analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 54 (2002), 763–787.
- [63] THOTAKURI, M. V. *Transverse compressive properties of honeycomb core under oblique loading [BSc thesis]*. Department o Aerospace Engineering - Wichita State University.
- [64] VAMPA, V. C. *Tesis de Maestría: Mejoras en el comportamiento membranar del elemento de lámina MITC4*. Universidad de Buenos Aires, 2004.
- [65] VLACHOUTSIS, S. Shear correction factors for plates and shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 33 (1992), 1537–1552.
- [66] WHITNEY, J. The effect of boundary conditions on the response of laminated composites. *Journal of Composite Materials* 4 (1970), 192–203.
- [67] WISNIEWSKI, K. *Finite Rotation Shells: Basic Equations and Finite Elements for Reissner Kinematics*. Springer, 2010.
- [68] YOUNG, W. C., AND BUDYNAS, R. G. *Roark's Formulas for Stress and Strain*, 7 ed. McGraw-Hill, 2002.
- [69] ZIENKIEWICZ, O., AND TAYLOR, R. *The Finite Element Method - Volume 1: The Basis*, fifth ed. Butterworth Heinemann, 2000.
- [70] ZIENKIEWICZ, O., AND TAYLOR, R. *The Finite Element Method - Volume 2: Solid Mechanics*, fifth ed. Butterworth Heinemann, 2000.

- [71] ZUO, Z., LI, S., ZHAI, C., AND XIE, L. Optimal lumped mass matrices by minimization of modal errors for beam elements. *Journal of vibration and accoustics* 136, 2 (2014).