

75.38 ANÁLISIS NUMÉRICO AVANZADO

TRABAJO PRÁCTICO 2

SIMULACIÓN NUMÉRICA DE LA DISTRIBUCIÓN DE TEMPERATURAS EN UN INTERCAMBIADOR
DE CALOR



Estudiante

FREDY ANDRÉS MERCADO NAVARRO
Pasaporte: 98'773.532
Maestría en Simulación Numérica y Control
Cuatrimestre: II-2011
31 de Enero

Universidad de Buenos Aires
Ciudad Autónoma de Buenos Aires
Argentina
2012

INDICE DE CONTENIDOS

1. INTRODUCCIÓN	4
2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	5
3. FORMULACIÓN DÉBIL DEL PROBLEMA.....	6
3.1 FORMULACIÓN DIFERENCIAL.....	6
3.2 FORMULACIÓN PONDERADA.....	7
3.2.1 Para la ecuación diferencial con residuo R1	7
3.2.2 Para la condición de Dirichlet con residuo R2	8
3.2.3 Para la condición de Neumann con residuo R3	8
3.2.4 Integración por partes y aplicación del Teorema de Green.....	9
3.3 FORMULACIÓN DÉBIL	10
4. DISCRETIZACIÓN POR EL MÉTODO DE VOLÚMENES FINITOS	11
4.1 FORMULACIÓN PARA ELEMENTOS TRIANGULARES DE TRES NODOS.....	12
4.2 FORMULACIÓN PARA ELEMENTOS CUADRANGULARES DE CUATRO NODOS.....	13
5. INTEGRACIÓN NUMÉRICA	20
6. DISCRETIZACIÓN DEL DOMINIO CON GMSH	21
6.1 MALLA TRIANGULAR NO ESTRUCTURADA	21
6.2 MALLA TRIANGULAR ESTRUCTURADA	22
6.3 MALLA CUADRANGULAR NO ESTRUCTURADA	23
6.4 MALLA CUADRANGULAR ESTRUCTURADA	23
7. IMPLEMENTACIÓN	25
7.1 PRE-PROCESAMIENTO	25
7.2 PROCESAMIENTO	25
7.3 POST-PROCESAMIENTO	25
8. RESULTADOS Y ANÁLISIS	26
8.1 SOLUCIÓN CON MALLAS ESTRUCTURADAS Y NO ESTRUCTURADAS	26
8.2 SOLUCIÓN CON VARIACIÓN DE LA CONDUCTIVIDAD DE LA ZONA C2	26
8.3 SOLUCIÓN CON VARIACIÓN DEL TAMAÑO DE LA MALLA	26
8.4 ANÁLISIS DE RESULTADOS.....	26
8.4.1 Malla triangular – No estructurada.....	27
8.4.2 Malla triangular – Estructurada	27
8.4.3 Malla cuadrangular – No estructurada	28
8.4.4 Malla cuadrangular - Estructurada	28
8.4.5 Malla triangular vs. Malla cuadrangular.....	29
8.4.6 Malla estructurada vs. Malla no estructurada	29
8.4.7 Comportamiento de la solución con la variación de C2	30
8.4.8 Malla gruesa vs. Malla fina	32
9. CONCLUSIONES GENERALES Y OBSERVACIONES.....	36

INDICE DE TABLAS

TABLA 1. FORMULACIÓN GENERAL PARA VOLÚMENES FINITOS EN DOS DIMENSIONES.....	11
TABLA 2. RESUMEN DE LA FORMULACIÓN PARA ELEMENTOS TRIANGULARES DE TRES NODOS.....	12
TABLA 3. RESUMEN DE LA FORMULACIÓN PARA ELEMENTOS CUADRANGULARES DE CUATRO NODOS.....	14
TABLA 4. CONSTANTES DE NEWTON-COTES PARA INTEGRACIÓN NUMÉRICA CON $n = 4$	20
TABLA 5. DIFERENCIA DE SOLUCIONES ENTRE MALLAS ESTRUCTURADAS Y NO ESTRUCTURADAS. $Lc \sim 0.25$	30
TABLA 6. PORCENTAJE DE DIFERENCIA ENTRE FORMULACIONES PARA DIFERENTE CONDUCTIVIDAD $C2$	32
TABLA 7. COMPORTAMIENTO DE LA SOLUCIÓN CON EL CAMBIO DEL TAMAÑO DE LA MALLA.....	34
TABLA 8. VARIACIÓN DE ALGUNOS PARÁMETROS CON EL CAMBIO DEL TAMAÑO DE LA MALLA.....	35

INDICE DE FIGURAS

FIGURA 1. DOMINIO DEL PROBLEMA.....	5
FIGURA 2. GEOMETRÍA PARA MALLAS NO ESTRUCTURADAS.....	21
FIGURA 3. MALLA TRIANGULAR NO ESTRUCTURADA.....	22
FIGURA 4. GEOMETRÍA PARA MALLAS ESTRUCTURADAS.....	22
FIGURA 5. MALLA TRIANGULAR ESTRUCTURADA.....	23
FIGURA 6. MALLA CUADRANGULAR NO ESTRUCTURADA.....	23
FIGURA 7. MALLA CUADRANGULAR ESTRUCTURADA.....	24
FIGURA 8. SOLUCIÓN CON MALLA TRIANGULAR NO ESTRUCTURADA.....	27
FIGURA 9. SOLUCIÓN CON MALLA TRIANGULAR ESTRUCTURADA.....	27
FIGURA 10. SOLUCIÓN CON MALLA CUADRANGULAR NO ESTRUCTURADA.....	28
FIGURA 11. SOLUCIÓN CON MALLA CUADRANGULAR ESTRUCTURADA.....	28
FIGURA 12. NODOS COMUNES A TODAS LAS DISCRETIZACIONES.....	29
FIGURA 13. SOLUCIONES CON MALLA TRIANGULAR ESTRUCTURADA CON VARIACIÓN DE LA CONDUCTIVIDAD $C2$	30
FIGURA 14. PERFILES DE TEMPERATURA SOBRE LÍNEA DE SIMETRÍA.....	31
FIGURA 15. SOLUCIONES CON MALLA CUADRANGULAR ESTRUCTURADA CON VARIACIÓN DE LA CONDUCTIVIDAD $C2$	31
FIGURA 16. SOLUCIONES CON VARIACIÓN DEL TAMAÑO DE LA MALLA.....	33
FIGURA 17. SOLUCIÓN VS. TAMAÑO DE MALLA PARA MALLA TRIANGULAR NO ESTRUCTURADA.....	34
FIGURA 18. TAMAÑO DE MALLA VS. TIEMPO DE CÁLCULO DE CICLOS ELEMENTALES PARA MALLA TRIANGULAR.....	35

1. INTRODUCCIÓN

Los problemas de equilibrio en dos o tres dimensiones son evaluados a partir de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales elípticas. El ejemplo más sencillo es el de la ecuación de Laplace, mediante la cual se puede simular la distribución de temperaturas en un intercambiador de calor.

Para lograr este objetivo se discretizará el dominio bidimensional del intercambiador de calor en elementos triangulares y cuadrangulares mediante el software libre GMSH y se desarrollará un código computacional en Matlab, empleando la formulación del método de los volúmenes finitos para resolver el problema de transferencia de calor.

Se analizará posteriormente la influencia de las diferentes formulaciones sobre las soluciones y también de factores como la estructura de la malla, el tamaño, los valores de conductividad al interior del dominio entre otros. Por último, como valor agregado, se analizarán algunos datos que comprueban la consistencia del método de los Volúmenes Finitos y la variación de los tiempos de cálculo con el tamaño de la malla.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

C_1 y C_2 son dos conductores térmicos dentro de un recinto C_0 . El primero de ellos se mantiene a una temperatura constante de $T_1 = 100 \text{ }^{\circ}\text{C}$ y el otro tiene una conductividad térmica k_2 que resulta 5 veces mayor que k_0 . Se asume que la temperatura en la frontera de C_0 es $T_0 = 20 \text{ }^{\circ}\text{C}$.

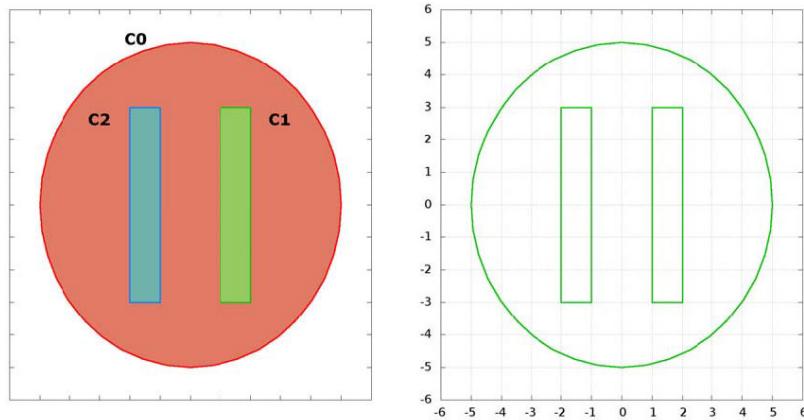


Figura 1. Dominio del problema.

Con el objetivo de conocer $T(x, y)$ en el recinto Ω , se debe resolver:

$$\nabla \cdot (k \cdot \nabla T) = 0 \quad \text{en } \Omega$$

Donde Ω es el interior de C_0 menos C_1 y Γ es el borde de Ω (los contornos de C_0 y C_1).

3. FORMULACIÓN DÉBIL DEL PROBLEMA

Para obtener la formulación requerida partiremos de la formulación diferencial, pasando por la formulación de residuos ponderados para llegar finalmente a la formulación débil o generalizada.

3.1 Formulación diferencial

La siguiente es la forma diferencial, en coordenadas cartesianas, de la ecuación de difusión del calor (conducción):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + f(T, x, y) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

Teniendo en cuenta que nuestro problema no posee variación con el tiempo y es bidimensional, la ecuación resulta:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + f = 0$$

En el dominio cerrado de nuestro problema la conductividad térmica es independiente de x e y , por lo tanto, $k_x = k_y = k$, y tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + f = 0 \quad \text{en } \Omega$$

Ecuación 1

Donde Ω es el área interior del intercambiador de calor y dominio de solución de la Ecuación 1. Completaremos la formulación introduciendo las ecuaciones para las condiciones de borde.

3.1.1 Condición de borde de Dirichlet

Corresponde a las temperaturas de los nodos que serán valores constantes a lo largo de todos los cálculos.

$$T(x, y) = T \quad \text{sobre } \Gamma_1$$

Donde Γ_1 es la suma de todas las fronteras con condición de borde de Dirichlet.

3.1.2 Condición de borde de Neumann

Corresponde a un flujo de calor especificado sobre

$$k \frac{\partial T}{\partial n} = q \quad \text{sobre } \Gamma_2$$

Donde Γ_2 es la suma de todas las fronteras con condición de borde de Neumann. Teniendo en cuenta que,

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial T}{\partial x} n_x + \frac{\partial T}{\partial y} n_y$$

3.2 Formulación ponderada

Como paso intermedio hasta la formulación débil, utilizaremos los conceptos de la teoría de residuos ponderados para llegar a la forma generalizada de nuestra ecuación diferencial para el transporte de calor por difusión.

Partiremos de la Ecuación 1 y de las ecuaciones para las condiciones de borde de Dirichlet y Neumann, así:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \right) + f = 0 \quad \text{en } \Omega$$

$$T(x, y) - T = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_1$$

$$k \frac{\partial T(x, y)}{\partial n} - q = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_2$$

Ahora, aplicando la teoría de los residuos ponderados, tendremos que $T(x, y)$ será una función que cumplirá con las ecuaciones en forma aproximada. De esta manera, las igualdades a cero deben ser reemplazadas por un residuo, así:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \right) + f = R_1 \quad \text{en } \Omega$$

$$T(x, y) - T = R_2 \quad \text{sobre } \Gamma_1$$

$$k \frac{\partial T(x, y)}{\partial n} - q = R_3 \quad \text{sobre } \Gamma_2$$

Luego, los residuos R_1, R_2 y R_3 son igualados a cero, multiplicados por una función de peso e integrados en cada dominio, de donde obtenemos la formulación ponderada, así:

3.2.1 Para la ecuación diferencial con residuo R_1

$$\int_{\Omega} w \cdot R_1 d\Omega = 0$$

$$\int_{\Omega} w \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + f \right) d\Omega = 0$$

$$\int_{\Omega} w \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) d\Omega + \int_{\Omega} w \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Omega} wf d\Omega = 0$$

$$\int_{\Omega} w k \nabla^2 T d\Omega + \int_{\Omega} w f d\Omega = 0$$

Ecuación 2

3.2.2 Para la condición de Dirichlet con residuo R_2

$$\int_{\Gamma_1} w \cdot R_2 d\Gamma = 0$$

$$\int_{\Gamma_1} w \cdot (T - T) d\Gamma = 0$$

3.2.3 Para la condición de Neumann con residuo R_3

$$\int_{\Gamma_2} w \cdot R_3 d\Gamma = 0$$

$$\int_{\Gamma_2} w \cdot \left(k \frac{\partial T}{\partial n} - q \right) d\Gamma = 0$$

Para continuar a partir de este punto debemos integrar el primer término de la Ecuación 2 por partes y aplicar el Teorema de Green. Para ilustrar el procedimiento desarrollaremos la integración por partes para la siguiente expresión:

$$\int_{\Omega} \phi \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dy$$

Ecuación 3

Integrando primero con respecto a x , y usando la relación para integración por partes en una dimensión, tenemos:

$$\int_{x_L}^{x_R} u dv = (uv)_{x=x_R} - (uv)_{x=x_L} - \int_{x_L}^{x_R} v du$$

Ahora, usando los símbolos de la Ecuación 3 tenemos:

$$\int_{\Omega} \phi \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dy = \int_{y_B}^{y_T} [(\phi \psi)_{x=x_R} - (\phi \psi)_{x=x_L}] dy - \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x} \psi dx dy$$

Para un segmento de frontera $d\Gamma$ en la parte derecha $dy = n_x d\Gamma$, y para un segmento en la parte izquierda $dy = -n_x d\Gamma$. Luego de integrar en los contornos a la derecha e izquierda tenemos que el primer término del miembro derecho puede entonces ser expresado como:

$$\oint_{\Gamma} \phi \psi n_x d\Gamma$$

Y la expresión general en x resultante es:

$$\int_{\Omega} \phi \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dy = \oint_{\Gamma} \phi \psi n_x d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x} \psi d\Omega$$

Ecuación 4

Si la diferenciación resulta en la dirección y tendríamos:

$$\int_{\Omega} \phi \frac{\partial \psi}{\partial y} dx dy = \oint_{\Gamma} \phi \psi n_y d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial y} \psi d\Omega$$

Ecuación 5

La secuencia de integración por partes y aplicación del Teorema de Green pueden ser consultados en la referencia [1].

3.2.4 Integración por partes y aplicación del Teorema de Green

Podemos aplicar la Ecuación 4 y la Ecuación 5 a los dos términos de la Ecuación 2, así:

$$\phi = w$$

$$\psi = k \frac{\partial T}{\partial x} \quad \text{para diferenciación en } x$$

$$\psi = k \frac{\partial T}{\partial y} \quad \text{para diferenciación en } y$$

$$\int_{\Omega} \phi \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dy \equiv \int_{\Omega} w \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy = \oint_{\Gamma} w \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) n_x d\Gamma - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) d\Omega$$

$$\int_{\Omega} \phi \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dy \equiv \int_{\Omega} w \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma} w \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) n_y d\Gamma - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) d\Omega$$

Reemplazando, agrupando y factorizando, obtengo, de la Ecuación 2:

$$\int_{\Omega} w k \nabla^2 T d\Omega = - \left[\int_{\Omega} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) d\Omega \right] + \left[\oint_{\Gamma} w \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) n_x d\Gamma + \oint_{\Gamma} w \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) n_y d\Gamma \right]$$

$$\int_{\Omega} w k \nabla^2 T d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla w \nabla T d\Omega + \oint_{\Gamma_{1+\Gamma_2}} w \left(k \frac{\partial T}{\partial n} \right) d\Gamma$$

$$\oint_{\Gamma_{1+\Gamma_2}} w \left(k \frac{\partial T}{\partial n} \right) d\Gamma = \oint_{\Gamma_1} w \left(k \frac{\partial T}{\partial n} \right) d\Gamma + \oint_{\Gamma_2} w \left(k \frac{\partial T}{\partial n} \right) d\Gamma$$

Dado que sobre Γ_1 solo tenemos condición de borde de Dirichlet, el primer término es igual a cero. Luego:

$$\oint_{\Gamma_{1+\Gamma_2}} w \left(k \frac{\partial T}{\partial n} \right) d\Gamma = \oint_{\Gamma_2} w \left(k \frac{\partial T}{\partial n} \right) d\Gamma$$

Y,

$$\int_{\Omega} wk \nabla^2 T d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla w \nabla T d\Omega + \oint_{\Gamma_2} w \left(k \frac{\partial T}{\partial n} \right) d\Gamma$$

Ecuación 6

Por la ley de Fourier para la transferencia de calor, sabemos que:

$$k \frac{\partial T}{\partial n} = -q$$

Luego, de la Ecuación 6 tenemos:

$$\int_{\Omega} wk \nabla^2 T d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla w \nabla T d\Omega + \oint_{\Gamma_2} w q d\Gamma$$

Ecuación 7**3.3 Formulación débil**

Finalmente, la formulación débil del problema térmico estacionario resulta, de la Ecuación 2 y la Ecuación 7:

$$\int_{\Omega} wk \nabla^2 T d\Omega + \int_{\Omega} wf d\Omega = 0$$

$$- \int_{\Omega} \nabla w \nabla T d\Omega + \oint_{\Gamma_2} w q d\Gamma + \int_{\Omega} wf d\Omega = 0$$

Ecuación 8. Formulación débil del problema.

$$T(x, y) = T \quad \text{sobre } \Gamma_1$$

$$T(x, y) \text{ clase } C_1$$

Para el desarrollo del método de los volúmenes finitos la función de peso $w = 1$ para todo el dominio Ω , por lo tanto, de la Ecuación 8:

$$\oint_{\Gamma} k \frac{\partial T}{\partial n} d\Gamma + \oint_{\Gamma_2} q d\Gamma + \int_{\Omega} f d\Omega = 0$$

Para efectos de nuestro problema, tenemos que $q = f = 0$, por lo tanto, la ecuación de conducción pura sin generación de calor y en estado estacionario es:

$$\oint_{\Gamma} k \frac{\partial T}{\partial n} d\Gamma = 0$$

Ecuación 9

4. DISCRETIZACIÓN POR EL MÉTODO DE VOLÚMENES FINITOS

En esta sección se incluirán los desarrollos matemáticos del método de los Volúmenes Finitos aplicado a un problema de conducción de calor bidimensional. La formulación será desarrollada en la primera parte para elementos triangulares de tres nodos y en la segunda parte, para elementos cuadrangulares de cuatro nodos. Así, a partir de la Ecuación 9 tenemos:

$$k \oint_{\Gamma} \frac{\partial T}{\partial n} d\Gamma = 0$$

$$\oint_{\Gamma} \left(\frac{\partial T}{\partial x} n_x + \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) d\Gamma = 0$$

$$\oint_{\Gamma} \frac{\partial T}{\partial x} n_x d\Gamma + \oint_{\Gamma} \frac{\partial T}{\partial y} n_y d\Gamma = 0$$

Ecuación 10

La tabla siguiente ilustra aquellas fórmulas generales que aplican a los dos tipos de elementos tratados en este trabajo.

Tabla 1. Formulación general para volúmenes finitos en dos dimensiones.

Formulación Generalizada para 2D	
$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x}$ $\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y}$	$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix}$
$J^{-1} = \frac{1}{\det(J)} \text{adj}(J)$ $J^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\det(J)} \frac{\partial y}{\partial s} & -\frac{1}{\det(J)} \frac{\partial y}{\partial r} \\ -\frac{1}{\det(J)} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{1}{\det(J)} \frac{\partial x}{\partial r} \end{bmatrix}$ $J^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial s}{\partial y} \end{bmatrix}$	$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{\det(J)} \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{1}{\det(J)} \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial s}$ $\frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{1}{\det(J)} \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{\det(J)} \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial s}$
$\det(J) = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial r}$	$n_x d\Gamma = dy = \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial s} ds$ $n_y d\Gamma = dx = -\frac{\partial x}{\partial r} dr - \frac{\partial x}{\partial s} ds$

4.1 Formulación para elementos triangulares de tres nodos

A continuación se desarrollará en forma general, la formulación para el método de volúmenes finitos cuyo dominio ha sido discretizado como una malla de elementos triangulares. Las funciones de forma estarán expresadas, por facilidad para su manejo, en términos de las coordenadas naturales r y s , las cuales estarán definidas $0 \leq r \leq 1$ y $0 \leq s \leq 1$.

La Tabla 2 ilustra aquellas formulas que aplican solo para el desarrollo matemático de los elementos triangulares.

Tabla 2. Resumen de la formulación para elementos triangulares de tres nodos

Resumen de la formulación para Elementos Triangulares		
$x = h_1 x_1 + h_2 x_2 + h_3 x_3$ $y = h_1 y_1 + h_2 y_2 + h_3 y_3$ $T = h_1 T_1 + h_2 T_2 + h_3 T_3$		$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial h_1}{\partial r} T_1 + \frac{\partial h_2}{\partial r} T_2 + \frac{\partial h_3}{\partial r} T_3$ $\frac{\partial T}{\partial s} = \frac{\partial h_1}{\partial s} T_1 + \frac{\partial h_2}{\partial s} T_2 + \frac{\partial h_3}{\partial s} T_3$
Funciones de forma		
$h_1 = 1 - r - s$ $\frac{\partial h_1}{\partial r} = -1$ $\frac{\partial h_1}{\partial s} = -1$	$h_2 = r$ $\frac{\partial h_2}{\partial r} = 1$ $\frac{\partial h_2}{\partial s} = 0$	$h_3 = s$ $\frac{\partial h_3}{\partial r} = 0$ $\frac{\partial h_3}{\partial s} = 1$
$J^{-1} = \frac{1}{\det(J)} \begin{bmatrix} l_{y13} & -l_{y12} \\ -l_{x13} & l_{x12} \end{bmatrix}$ $J^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{l_{y13}}{\det(J)} & -\frac{l_{y12}}{\det(J)} \\ -\frac{l_{x13}}{\det(J)} & \frac{l_{x12}}{\det(J)} \end{bmatrix}$	$dy = n_x d\Gamma = l_{y12} dr + l_{y13} ds$ $dx = n_y d\Gamma = -l_{x12} dr - l_{x13} ds$	

Continuamos con la formulación procediendo a partir de la Ecuación 10:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{l_{y13}}{\det(J)} \left(\frac{\partial h_1}{\partial r} \hat{T}_1 + \frac{\partial h_2}{\partial r} \hat{T}_2 + \frac{\partial h_3}{\partial r} \hat{T}_3 \right) - \frac{l_{y12}}{\det(J)} \left(\frac{\partial h_1}{\partial s} \hat{T}_1 + \frac{\partial h_2}{\partial s} \hat{T}_2 + \frac{\partial h_3}{\partial s} \hat{T}_3 \right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{l_{x13}}{\det(J)} \left(\frac{\partial h_1}{\partial r} \hat{T}_1 + \frac{\partial h_2}{\partial r} \hat{T}_2 + \frac{\partial h_3}{\partial r} \hat{T}_3 \right) + \frac{l_{x12}}{\det(J)} \left(\frac{\partial h_1}{\partial s} \hat{T}_1 + \frac{\partial h_2}{\partial s} \hat{T}_2 + \frac{\partial h_3}{\partial s} \hat{T}_3 \right)$$

Dado que poseo las derivadas de las funciones de forma, de la Tabla 1, reemplazo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{l_{y13}}{\det(J)}(-\hat{T}_1 + \hat{T}_2) + \frac{l_{y12}}{\det(J)}(-\hat{T}_1 + \hat{T}_3) \\
\frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{l_{x13}}{\det(J)}(-\hat{T}_1 + \hat{T}_2) + \frac{l_{x12}}{\det(J)}(-\hat{T}_1 + \hat{T}_3) \\
\frac{\partial T}{\partial x} n_x d\Gamma &= \frac{1}{\det(J)} \left[-\langle l_{y13} l_{y12} dr + l_{y12} l_{y13} ds + l_{y12}^2 dr + l_{y13}^2 ds \rangle \hat{T}_1 \right. \\
&\quad \left. + (l_{y13} l_{y12} dr + l_{y13}^2 ds) \hat{T}_2 + (l_{y12}^2 dr + l_{y12} l_{y13} ds) \hat{T}_3 \right] \\
\frac{\partial T}{\partial y} n_y d\Gamma &= \frac{1}{\det(J)} \left[\{ l_{x12} l_{x13} dr + l_{x12} l_{x13} ds + l_{x12}^2 dr + l_{x13}^2 ds \} \hat{T}_1 \right. \\
&\quad \left. - (l_{x12} l_{x13} dr + l_{x13}^2 ds) \hat{T}_2 - (l_{x12}^2 dr + l_{x12} l_{x13} ds) \hat{T}_3 \right]
\end{aligned}$$

Finalmente, teniendo en cuenta el contenido de la Tabla 1 obtengo:

$$\oint_{\Gamma} \frac{\partial T}{\partial x} n_x d\Gamma + \oint_{\Gamma} \frac{\partial T}{\partial y} n_y d\Gamma = \frac{1}{\det(J)} \{ -[a_2] + [a_3] \hat{T}_1 + [a_2] \hat{T}_2 + [a_3] \hat{T}_3 \} = 0$$

Ecuación 11

$$[a_2] = \alpha_{123} \Psi_r + \alpha_{13} \Psi_s$$

$$[a_3] = \alpha_{12} \Psi_r + \alpha_{123} \Psi_s$$

$$\alpha_{12} = l_{x12}^2 - l_{y12}^2$$

$$\alpha_{13} = l_{x13}^2 - l_{y13}^2$$

$$\alpha_{123} = l_{x12} l_{x13} - l_{y12} l_{y13}$$

$$\Psi_r = \int_{r1}^{r2} dr, \quad r \text{ para el punto } n = 1 \text{ hasta } 3.$$

$$\Psi_s = \int_{s1}^{s2} ds, \quad s \text{ para el punto } n = 1 \text{ hasta } 3.$$

No se profundiza más en la formulación para elementos triangulares dado que ésta fue estudiada anteriormente en el curso de Análisis Numérico Avanzado. A continuación, se expone el desarrollo de la formulación para elementos cuadrangulares.

4.2 Formulación para elementos cuadrangulares de cuatro nodos

A diferencia de la formulación para elementos triangulares, la formulación para elementos cuadrangulares debe incluir un nodo adicional. Las coordenadas cartesianas x e y , al igual que

la temperatura T deberán ser expresadas, a lo largo y ancho de cada elemento, en función de los valores nodales de cada nodo. Siendo así, es necesario tener en cuenta un grupo diferente de funciones de forma.

Tabla 3. Resumen de la formulación para elementos cuadrangulares de cuatro nodos

Resumen de la formulación para Elementos Cuadrangulares	
$x = h_1x_1 + h_2x_2 + h_3x_3 + h_4x_4$ $y = h_1y_1 + h_2y_2 + h_3y_3 + h_4y_4$ $T = h_1T_1 + h_2T_2 + h_3T_3 + h_4T_4$	$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial h_1}{\partial r}T_1 + \frac{\partial h_2}{\partial r}T_2 + \frac{\partial h_3}{\partial r}T_3 + \frac{\partial h_4}{\partial r}T_4$ $\frac{\partial T}{\partial s} = \frac{\partial h_1}{\partial s}T_1 + \frac{\partial h_2}{\partial s}T_2 + \frac{\partial h_3}{\partial s}T_3 + \frac{\partial h_4}{\partial s}T_4$
$\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \sum_{i=1}^4 h_i x_i$ $\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{\partial h_1}{\partial r}x_1 + \frac{\partial h_2}{\partial r}x_2 + \frac{\partial h_3}{\partial r}x_3 + \frac{\partial h_4}{\partial r}x_4$ $\frac{\partial x}{\partial r} = -(1-s)x_1 + (1-s)x_2 + sx_3 - sx_4$ $\frac{\partial x}{\partial r} = x_2 - x_1 + s(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)$ $\frac{\partial x}{\partial r} = c + sa$	$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \sum_{i=1}^4 h_i x_i$ $\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial h_1}{\partial s}x_1 + \frac{\partial h_2}{\partial s}x_2 + \frac{\partial h_3}{\partial s}x_3 + \frac{\partial h_4}{\partial s}x_4$ $\frac{\partial x}{\partial s} = -(1-r)x_1 - rx_2 + rx_3 + (1-r)x_4$ $\frac{\partial x}{\partial s} = x_4 - x_1 + r(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)$ $\frac{\partial x}{\partial s} = d + ra$
$\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \sum_{i=1}^4 h_i y_i$ $\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial h_1}{\partial r}y_1 + \frac{\partial h_2}{\partial r}y_2 + \frac{\partial h_3}{\partial r}y_3 + \frac{\partial h_4}{\partial r}y_4$ $\frac{\partial y}{\partial r} = -(1-s)y_1 + (1-s)y_2 + sy_3 - sy_4$ $\frac{\partial y}{\partial r} = y_2 - y_1 + s(y_1 - y_2 + y_3 - y_4)$ $\frac{\partial y}{\partial r} = e + sb$	$\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \sum_{i=1}^4 h_i y_i$ $\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial h_1}{\partial s}y_1 + \frac{\partial h_2}{\partial s}y_2 + \frac{\partial h_3}{\partial s}y_3 + \frac{\partial h_4}{\partial s}y_4$ $\frac{\partial y}{\partial s} = -(1-r)y_1 - ry_2 + ry_3 + (1-r)y_4$ $\frac{\partial y}{\partial s} = y_4 - y_1 + r(y_1 - y_2 + y_3 - y_4)$ $\frac{\partial y}{\partial s} = f + rb$
Funciones de forma	
$h_1 = (1-r)(1-s)$	$h_2 = (1-s)r$
$h_3 = rs$	$h_4 = (1-r)s$

$\frac{\partial h_1}{\partial r} = -(1-s)$	$\frac{\partial h_2}{\partial r} = (1-s)$	$\frac{\partial h_3}{\partial r} = s$	$\frac{\partial h_4}{\partial r} = -s$
$\frac{\partial h_1}{\partial s} = -(1-r)$	$\frac{\partial h_2}{\partial s} = -r$	$\frac{\partial h_3}{\partial s} = r$	$\frac{\partial h_4}{\partial s} = (1-r)$

Para la formulación de los elementos cuadrangulares continuamos también a partir de la Ecuación 10, así:

$$\oint_{\Gamma} \frac{\partial T}{\partial n} d\Gamma = 0$$

$$\oint_{\Gamma} \left(\frac{\partial T}{\partial x} n_x + \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) d\Gamma = 0$$

$$\oint_{\Gamma} \frac{\partial T}{\partial x} n_x d\Gamma + \oint_{\Gamma} \frac{\partial T}{\partial y} n_y d\Gamma = 0$$

De la Tabla 1 tenemos:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y}$$

Ecuación 12

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix}$$

$$J^{-1} = \frac{1}{\det(J)} \text{adj}(J)$$

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\det(J)} \frac{\partial y}{\partial s} & -\frac{1}{\det(J)} \frac{\partial y}{\partial r} \\ -\frac{1}{\det(J)} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{1}{\det(J)} \frac{\partial x}{\partial r} \end{bmatrix}$$

A continuación definimos un cambio de variables para facilitar el tratamiento algebraico de las expresiones:

$$a = x_1 - x_2 + x_3 - x_4$$

$$b = y_1 - y_2 + y_3 - y_4$$

$$c = x_2 - x_1$$

$$d = y_2 - y_1$$

$$e = x_4 - x_1$$

$$f = y_4 - y_1$$

De la Tabla 3 tenemos:

$\frac{\partial x}{\partial r} = c + sa$	$\frac{\partial x}{\partial s} = d + ra$
$\frac{\partial y}{\partial r} = e + sb$	$\frac{\partial y}{\partial s} = f + rb$

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial s}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{\det(J)} (f + rb) \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{1}{\det(J)} (d + sb) \frac{\partial T}{\partial s}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{1}{\det(J)} (e + ra) \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{\det(J)} (c + sa) \frac{\partial T}{\partial s}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial h_1}{\partial r} T_1 + \frac{\partial h_2}{\partial r} T_2 + \frac{\partial h_3}{\partial r} T_3 + \frac{\partial h_4}{\partial r} T_4$$

$$\frac{\partial T}{\partial s} = \frac{\partial h_1}{\partial s} T_1 + \frac{\partial h_2}{\partial s} T_2 + \frac{\partial h_3}{\partial s} T_3 + \frac{\partial h_4}{\partial s} T_4$$

De la Tabla 1 tenemos:

$$\det(J) = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial x}{\partial s}$$

$$\det(J) = (c + sa)(f + rb) - (d + sb)(e + ra)$$

$$\det(J) = cf - de + r(cb - da) + s(af - be) + rs(ab - ab)$$

$$\det(J) = cf - de + r(cb - da) + s(af - be)$$

De la Ecuación 10 y Ecuación 12 se obtiene:

$$\oint_{\Gamma} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} \right) n_x d\Gamma + \oint_{\Gamma} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} \right) n_y d\Gamma = 0$$

$$\oint_{\Gamma} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} \right) dy + \oint_{\Gamma} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} \right) dx = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} \left[\oint_{\Gamma} \frac{\partial r}{\partial x} dy + \oint_{\Gamma} \frac{\partial r}{\partial y} dx \right] + \frac{\partial T}{\partial s} \left[\oint_{\Gamma} \frac{\partial s}{\partial x} dy + \oint_{\Gamma} \frac{\partial s}{\partial y} dx \right] = 0$$

Factorizando:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial h_1}{\partial r} \hat{T}_1 + \frac{\partial h_2}{\partial r} \hat{T}_2 + \frac{\partial h_3}{\partial r} \hat{T}_3 + \frac{\partial h_4}{\partial r} \hat{T}_4 \right) \left[\oint_{\Gamma} \frac{\partial r}{\partial x} dy + \oint_{\Gamma} \frac{\partial r}{\partial y} dx \right] \\ & + \left(\frac{\partial h_1}{\partial s} \hat{T}_1 + \frac{\partial h_2}{\partial s} \hat{T}_2 + \frac{\partial h_3}{\partial s} \hat{T}_3 + \frac{\partial h_4}{\partial s} \hat{T}_4 \right) \left[\oint_{\Gamma} \frac{\partial s}{\partial x} dy + \oint_{\Gamma} \frac{\partial s}{\partial y} dx \right] = 0 \end{aligned}$$

Ecuación 13

Se definen las variables v y w para facilitar el tratamiento algebraico, así:

$$\begin{aligned} v &= \left[\oint_{\Gamma} \frac{\partial r}{\partial x} dy + \oint_{\Gamma} \frac{\partial r}{\partial y} dx \right] \\ w &= \left[\oint_{\Gamma} \frac{\partial s}{\partial x} dy + \oint_{\Gamma} \frac{\partial s}{\partial y} dx \right] \end{aligned}$$

De la Tabla 1:

$$n_x d\Gamma = dy = \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial s} ds$$

$$n_y d\Gamma = dx = -\frac{\partial x}{\partial r} dr - \frac{\partial x}{\partial s} ds$$

Operando y factorizando se obtiene:

$$\begin{aligned} v &= \left[\left(\frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial r} - \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial r} \right) \oint_{\Gamma} dr + \left(\frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial s} \right) \oint_{\Gamma} ds \right] \\ w &= \left[\left(\frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial r} - \frac{\partial s}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial r} \right) \oint_{\Gamma} dr + \left(\frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial s}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial s} \right) \oint_{\Gamma} ds \right] \end{aligned}$$

Luego, de la Ecuación 13

$$\left(\frac{\partial h_1}{\partial r} \hat{T}_1 + \frac{\partial h_2}{\partial r} \hat{T}_2 + \frac{\partial h_3}{\partial r} \hat{T}_3 + \frac{\partial h_4}{\partial r} \hat{T}_4 \right) v + \left(\frac{\partial h_1}{\partial s} \hat{T}_1 + \frac{\partial h_2}{\partial s} \hat{T}_2 + \frac{\partial h_3}{\partial s} \hat{T}_3 + \frac{\partial h_4}{\partial s} \hat{T}_4 \right) w = 0$$

$$\left[\frac{\partial h_1}{\partial r} v + \frac{\partial h_1}{\partial s} w \right] \hat{T}_1 + \left[\frac{\partial h_2}{\partial r} v + \frac{\partial h_2}{\partial s} w \right] \hat{T}_2 + \left[\frac{\partial h_3}{\partial r} v + \frac{\partial h_3}{\partial s} w \right] \hat{T}_3 + \left[\frac{\partial h_4}{\partial r} v + \frac{\partial h_4}{\partial s} w \right] \hat{T}_4 = 0$$

$$a_1 \hat{T}_1 + a_2 \hat{T}_2 + a_3 \hat{T}_3 + a_4 \hat{T}_4 = 0$$

Ecuación 14

Nuevamente, de la Tabla 3 obtengo:

$\frac{\partial x}{\partial r} = c + sa$	$\frac{\partial x}{\partial s} = d + ra$
$\frac{\partial y}{\partial r} = e + sb$	$\frac{\partial y}{\partial s} = f + rb$

$$\Lambda = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial r} - \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial r} = [(f + rb)(d + sb) + (e + ra)(c + sa)] \frac{1}{\det(J)}$$

$$\Theta = \left(\frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial s} \right) = [(f + rb)^2 + (e + ra)^2] \frac{1}{\det(J)}$$

$$\Upsilon = \left(\frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial r} - \frac{\partial s}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial r} \right) = [-(d + sb)^2 - (c + sa)^2] \frac{1}{\det(J)}$$

$$\Pi = \left(\frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial s}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial s} \right) = [-(d + sb)(f + rb) - (c + sa)(e + ra)] \frac{1}{\det(J)}$$

Luego, de la Ecuación 14:

$$a_1 = \frac{\partial h_1}{\partial r} v + \frac{\partial h_1}{\partial s} w$$

$$a_2 = \frac{\partial h_2}{\partial r} v + \frac{\partial h_2}{\partial s} w$$

$$a_3 = \frac{\partial h_3}{\partial r} v + \frac{\partial h_3}{\partial s} w$$

$$a_4 = \frac{\partial h_4}{\partial r} v + \frac{\partial h_4}{\partial s} w$$

$$a_1 = -(\Lambda + \Upsilon) \oint dr - (\Theta + \Pi) \oint ds + \Lambda \oint s dr + \Theta \oint s ds + \Upsilon \oint r dr + \Pi \oint r ds$$

$$a_2 = -\Lambda \oint s dr - \Theta \oint s ds + \Upsilon \oint r dr - \Upsilon \oint r ds + \Pi \oint ds - \Pi \oint r ds$$

$$a_3 = \Lambda \oint s dr + \Theta \oint s ds + \Upsilon \oint r dr + \Pi \oint r ds$$

$$a_4 = \Lambda \oint dr - \Lambda \oint s dr + \Theta \oint ds - \Theta \oint s ds - \Upsilon \oint r dr - \Pi \oint r ds$$

$$\begin{aligned} a_1 = & \left[((c^2 + d^2) - (df + ce)) \oint \frac{dr}{\det(J)} - (bd + ac) \oint \frac{r dr}{\det(J)} - ((bf + ae) - 2(bd + ac)) \oint \frac{s dr}{\det(J)} \right. \\ & - (a^2 + b^2) \oint \frac{rs dr}{\det(J)} + (a^2 + b^2) \oint \frac{s^2 dr}{\det(J)} + ((df + ce) - (e^2 + d^2)) \oint \frac{ds}{\det(J)} \\ & + (bf + ae) \oint \frac{s ds}{\det(J)} - (2(bf + ae) - (bd + ac)) \oint \frac{r ds}{\det(J)} + (a^2 + b^2) \oint \frac{rs ds}{\det(J)} \\ & \left. - (a^2 + b^2) \oint \frac{r^2 ds}{\det(J)} + a_3 \right] \end{aligned}$$

$$a2 = \left[(df + ce) \oint \frac{dr}{\det(J)} + (bf + ae) \oint \frac{sdr}{\det(J)} + (bd + ac) \oint \frac{rdr}{\det(J)} + (a^2 + b^2) \oint \frac{rsdr}{\det(J)} \right. \\ \left. + (f^2 + e^2) \oint \frac{ds}{\det(J)} + 2(bf + ae) \oint \frac{rds}{\det(J)} + (a^2 + b^2) \oint \frac{r^2ds}{\det(J)} - a3 \right]$$

$$a3 = \left[-(c^2 + d^2) \oint \frac{rdr}{\det(J)} + (df + ce) \oint \frac{sdr}{\det(J)} + (bf + ae) \oint \frac{s^2dr}{\det(J)} - (bd + ac) \oint \frac{rsdr}{\det(J)} \right. \\ \left. + (f^2 + e^2) \oint \frac{sds}{\det(J)} - (df + ce) \oint \frac{rds}{\det(J)} - (bd + ac) \oint \frac{r^2ds}{\det(J)} + (bf + ae) \oint \frac{rsds}{\det(J)} \right]$$

$$a4 = \left[-(c^2 + d^2) \oint \frac{dr}{\det(J)} - 2(bd + ac) \oint \frac{sdr}{\det(J)} - (a^2 + b^2) \oint \frac{s^2dr}{\det(J)} - (df + ce) \oint \frac{ds}{\det(J)} \right. \\ \left. - (bd + ac) \oint \frac{rds}{\det(J)} - (bf + ae) \oint \frac{sds}{\det(J)} - (a^2 + b^2) \oint \frac{rsds}{\det(J)} - a3 \right]$$

Por último, realizamos un cambio de variables para facilitar el tratamiento algebraico y optimizar el código computacional a desarrollar, así:

$$A = (df + ce) \quad B = (bd + ac) \quad C = (a^2 + b^2) \quad D = (c^2 + d^2) \quad E = (bf + ae) \quad F = (f^2 + e^2)$$

Por último, obtengo, la forma final de los coeficientes de la Ecuación 14, siendo:

$$a_1 \hat{T}_1 + a_2 \hat{T}_2 + a_3 \hat{T}_3 + a_4 \hat{T}_4 = 0$$

Ecuación 15

$$a3 = \left[-D \oint \frac{rdr}{\det(J)} + A \oint \frac{sdr}{\det(J)} + E \oint \frac{s^2dr}{\det(J)} - B \oint \frac{rsdr}{\det(J)} + F \oint \frac{sds}{\det(J)} - A \oint \frac{rds}{\det(J)} - B \oint \frac{r^2ds}{\det(J)} \right. \\ \left. + E \oint \frac{rsds}{\det(J)} \right]$$

$$a1 = \left[(D - A) \oint \frac{dr}{\det(J)} - B \oint \frac{rdr}{\det(J)} - (E - 2B) \oint \frac{sdr}{\det(J)} - C \oint \frac{rsdr}{\det(J)} + C \oint \frac{s^2dr}{\det(J)} + (A - F) \oint \frac{ds}{\det(J)} \right. \\ \left. + E \oint \frac{sds}{\det(J)} - (2E - B) \oint \frac{rds}{\det(J)} + C \oint \frac{rsds}{\det(J)} - C \oint \frac{r^2ds}{\det(J)} + a3 \right]$$

$$a2 = \left[A \oint \frac{dr}{\det(J)} + E \oint \frac{sdr}{\det(J)} + B \oint \frac{rdr}{\det(J)} + C \oint \frac{rsdr}{\det(J)} + F \oint \frac{ds}{\det(J)} + 2E \oint \frac{rds}{\det(J)} + C \oint \frac{r^2ds}{\det(J)} - a3 \right]$$

$$a4 = \left[-D \oint \frac{dr}{\det(J)} - 2B \oint \frac{sdr}{\det(J)} - C \oint \frac{s^2dr}{\det(J)} - A \oint \frac{ds}{\det(J)} - B \oint \frac{rds}{\det(J)} - E \oint \frac{sds}{\det(J)} - C \oint \frac{rsds}{\det(J)} - a3 \right]$$

La formulación anterior será aplicada luego a cada elemento en forma individual. Así se conformarán las matrices elementales que luego serán ensambladas en una matriz global que tendrá en cuenta todos los nodos del dominio.

5. INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Las integrales de la formulación triangular pudieron ser calculadas analíticamente, sin embargo, aquellas de la formulación cuadrangular debieron ser calculadas numéricamente. Se utilizó el método de Newton-Cotes en una dimensión, para el cual tenemos:

$$\int_a^b F(r)dr = (b-a) \sum_{i=0}^n C_i^n F_i$$

Donde C_i^n son los coeficientes de Newton-Cotes, F_i las evaluaciones de la función a integrar en cada punto y n el número de intervalos. Para las integraciones se eligió $n = 4$. Las constantes son:

Tabla 4. Constantes de Newton-Cotes para integración numérica con $n = 4$.

Intervalos n	Constantes de Newton-Cotes				
	C_0^n	C_1^n	C_2^n	C_3^n	C_4^n
4	7/90	32/90	12/90	32/90	7/90

Las integrales a calcular tienen todas la forma:

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{F(r)dr}{\det J}$$

Con:

$$\det(J) = cf - de + r(cb - da) + s(af - be)$$

La formulación del método de integración numérica y los valores de la Tabla 4 fueron consultados en la referencia [2].

6. DISCRETIZACIÓN DEL DOMINIO CON GMSH

El dominio bidimensional del intercambiador de calor será discretizado por medio del software libre GMSH.

El primer paso para la generación de los mallados es la creación de la geometría. A partir de la geometría se genera la malla. Para todos los mallados se utilizó una longitud característica aplicada a los puntos igual a 1. Posteriormente, a través del comando Refine by Splitting, en el entorno Mesh, refinamos la malla hasta el tamaño deseado.

Luego de refinar las mallas modificando la longitud característica, se descubrió que el uso del comando Refine by Splitting conserva los patrones de la malla original, ya que crea los nuevos elementos dividiendo en dos cada lado del elemento, mientras que, generar la malla desde un inicio con una longitud característica de pequeña resultó en que las mallas no estructuradas eran creadas con un nivel de aleatoriedad mayor que asignando una $Lc=1$ y refinando automáticamente el número de veces deseado.

6.1 Malla triangular no estructurada

La Figura 2 ilustra la geometría utilizada para las mallas no estructuradas.

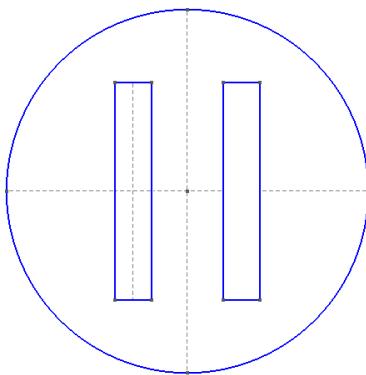


Figura 2. Geometría para mallas no estructuradas.

Se introdujo como parámetro una longitud característica nodal de 1. Antes de mallar, seleccionamos Tools>Options>Subdivision algorithm>None. De esta manera, la malla a generar será triangular y no estructurada por defecto. Luego, teniendo la geometría lista, en el módulo Mesh seleccionamos la opción 2D. El resultado es una malla triangular no estructurada de elementos con $Lc=1$, ver Figura 16a. Mientras más pequeños sean los elementos mejor será la aproximación de la solución de la ecuación diferencial. Por ello, refinamos dos veces, logrando una malla satisfactoria con una $Lc=0.25$. El resultado del mallado se ilustra en la Figura 3.

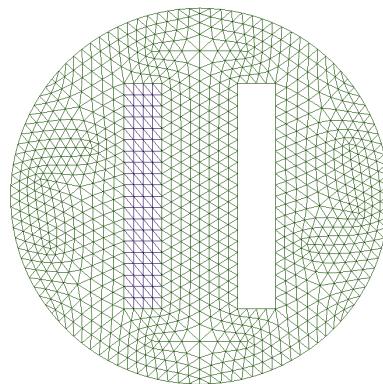


Figura 3. Malla triangular no estructurada.

6.2 Malla triangular estructurada

Para las mallas estructuradas, la cantidad de nodos sobre cada línea fue especificada en el algoritmo del GMSH, de modo que todas las mallas iniciales son producto de un trabajo de discretización artesanal. La malla original no fue refinada dado que el tamaño de los elementos obtenido equivale a una $L_c \sim 0.25$. La geometría utilizada para los mallados estructurados se ilustra en la Figura 4.

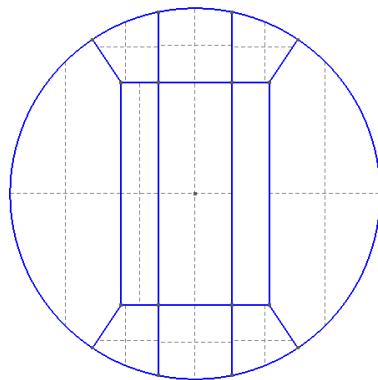


Figura 4. Geometría para mallas estructuradas.

Para generar la malla estructurada buscamos generar una distribución de nodos más fina cerca de las zonas C_1 y C_2 . Ver Figura 1. Para lograr este propósito se utilizó la siguiente línea de código:

```
Transfinite Line {17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25} = 10 Using Progression 1.2;
```

Donde los números entre corchetes indican el número de las líneas, el número 10 la cantidad de nodos sobre las líneas y los números al final de los códigos indican el valor de la progresión, o la cantidad en que crece el espacio entre nodos a medida que crece la distancia desde el punto inicial. El resultado final de la malla triangular estructurada se ilustra en la Figura 5. Nótese que la distancia entre nodos aumenta a medida que los nodos se alejan de las zonas C_1 y C_2 , a excepción de la zona ubicada en medio de ellas.

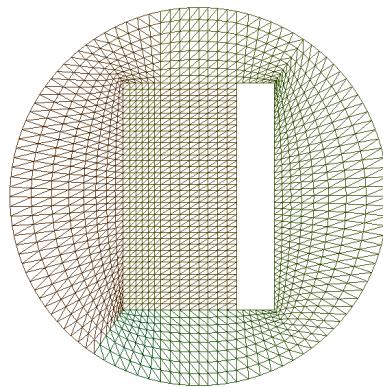


Figura 5. Malla triangular estructurada.

6.3 Malla cuadrangular no estructurada

La longitud característica seleccionada es $Lc=1$. Para lograr el mallado cuadrangular no estructurado se modificó en GMSH la siguiente secuencia: Options>Mesh>General>Subdivision algorithm>All Quads. De este modo los elementos serán elementos cuadrangulares. Utilizando la misma geometría de la Figura 2 y ejecutando el comando 2D en el módulo Mesh obtenemos la malla ilustrada en la Figura 6.

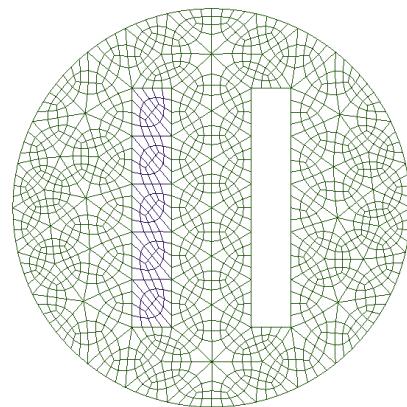


Figura 6. Malla cuadrangular no estructurada.

6.4 Malla cuadrangular estructurada

El proceso para la generación de la malla cuadrangular estructurada sigue el mismo algoritmo que para la malla triangular estructurada. La diferencia radica en incluir en el código de la geometría la siguiente línea:

```
Recombine Surface {36, 38, 40, 42, 28, 30, 32, 44, 46, 34};
```

Esto último produce la combinación de 2 elementos triangulares en un solo elemento cuadrangular. El resultado del mallado se observa en la Figura 7.

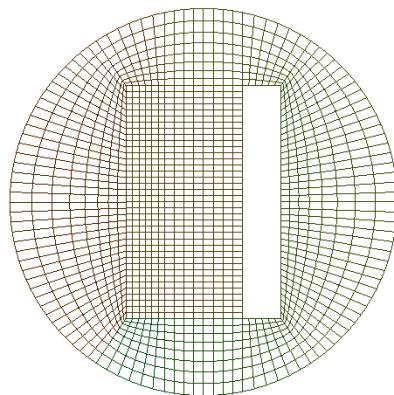


Figura 7. Malla cuadrangular estructurada.

Nótese que la malla cuadrangular estructurada es la malla triangular estructurada sin las líneas diagonales en cada elemento cuadrilateral.

7. IMPLEMENTACIÓN

La solución numérica del problema fue desarrollada a través de la implementación de un código computacional desarrollado en el programa *Matlab*. Además se utilizó la aplicación GMSH para el pre- y post-procesamiento.

7.1 Pre-procesamiento

El mismo se realizó utilizando la aplicación GMSH (<http://geuz.org/gmsh/>). A través de su interfaz gráfica se dibujó la geometría y se elaboraron las mallas para cada caso a analizar. Se produce un archivo en formato ascii con extensión .msh, el cual contiene la información de las coordenadas de cada nodo e información de la conectividad entre los elementos.

7.2 Procesamiento

Los datos suministrados por el archivo ascii son separados en tres matrices. Una matriz de coordenadas nodales, seguida por una matriz de nodos con condiciones de borde definidas y una matriz de conectividad.

Posterior a la lectura de los datos se procede a procesarlos de tal forma que podamos aplicar la Ecuación 11 y Ecuación 15 en la solución numérica del problema. Para ello, se resolvió un sistema de ecuaciones de $N \times N$, donde N es el número total de nodos de la malla. Tenemos entonces un sistema de ecuaciones lineales de la forma,

$$\mathbf{K}\hat{\mathbf{T}} = \mathbf{b}$$

donde $\mathbf{K} [N \times N]$ es la matriz global de coeficientes, $\hat{\mathbf{T}} [N \times 1]$ es el vector de incógnitas (temperaturas nodales) y $\mathbf{b} [N \times 1]$ es un vector que contiene información de flujos de calor calculados a partir de las temperaturas especificadas como condiciones de borde C_0 y C_1 . La matriz global de coeficientes se obtiene aplicando la formulación a cada elemento. Luego, dentro del ciclo elemental cada matriz se suma a la matriz global con la información otorgada por la matriz de conectividad. Posterior a esto se introducen las condiciones de borde, donde se modifican las matrices \mathbf{K} y \mathbf{b} .

Dado que nuestro problema es lineal, Matlab utiliza uno de sus algoritmos de solución para hallar $\hat{\mathbf{T}} = \mathbf{K} \backslash \mathbf{b}$ (en lenguaje de Matlab).

7.3 Post-procesamiento

El código de Matlab genera un archivo en formato ascii con las temperaturas de cada nodo. En este punto se utiliza el módulo Post-processing de GMSH para graficar la distribución de temperaturas. Dicho módulo utiliza las temperaturas nodales para graficar la distribución de temperaturas sobre todo el dominio interpolando (linealmente en este caso) los valores interiores de cada elemento a partir de sus valores nodales.

8. RESULTADOS Y ANÁLISIS

En los primeros numerales se introducirán los resultados de la simulación numérica. Por último, en el numeral 8.4 se analizarán los resultados respectivos para cada caso.

8.1 Solución con mallas estructuradas y no estructuradas

En esta sección se ilustran los resultados de la simulación numérica con los cuatro mallados solicitados por el planteamiento del problema. Se especifican el tipo, número de elementos, y número de nodos totales. El valor de la conductividad térmica de C_2 permaneció constante siendo 5 veces el valor de la conductividad térmica C_0 .

La distribución de temperaturas para cada tipo de mallado se ilustra en la Figura 8, Figura 9, Figura 10 y Figura 11.

8.2 Solución con variación de la conductividad de la zona C_2

La Figura 13 y Figura 15 ilustran la distribución de temperaturas para cuatro valores de conductividad de la zona C_2 . Los valores seleccionados son 10, 1 y 0.1 veces la conductividad de C_0 . Solo se incluyen resultados para las mallas estructuradas debido a que los resultados para las mallas no estructuradas son muy similares.

8.3 Solución con variación del tamaño de la malla

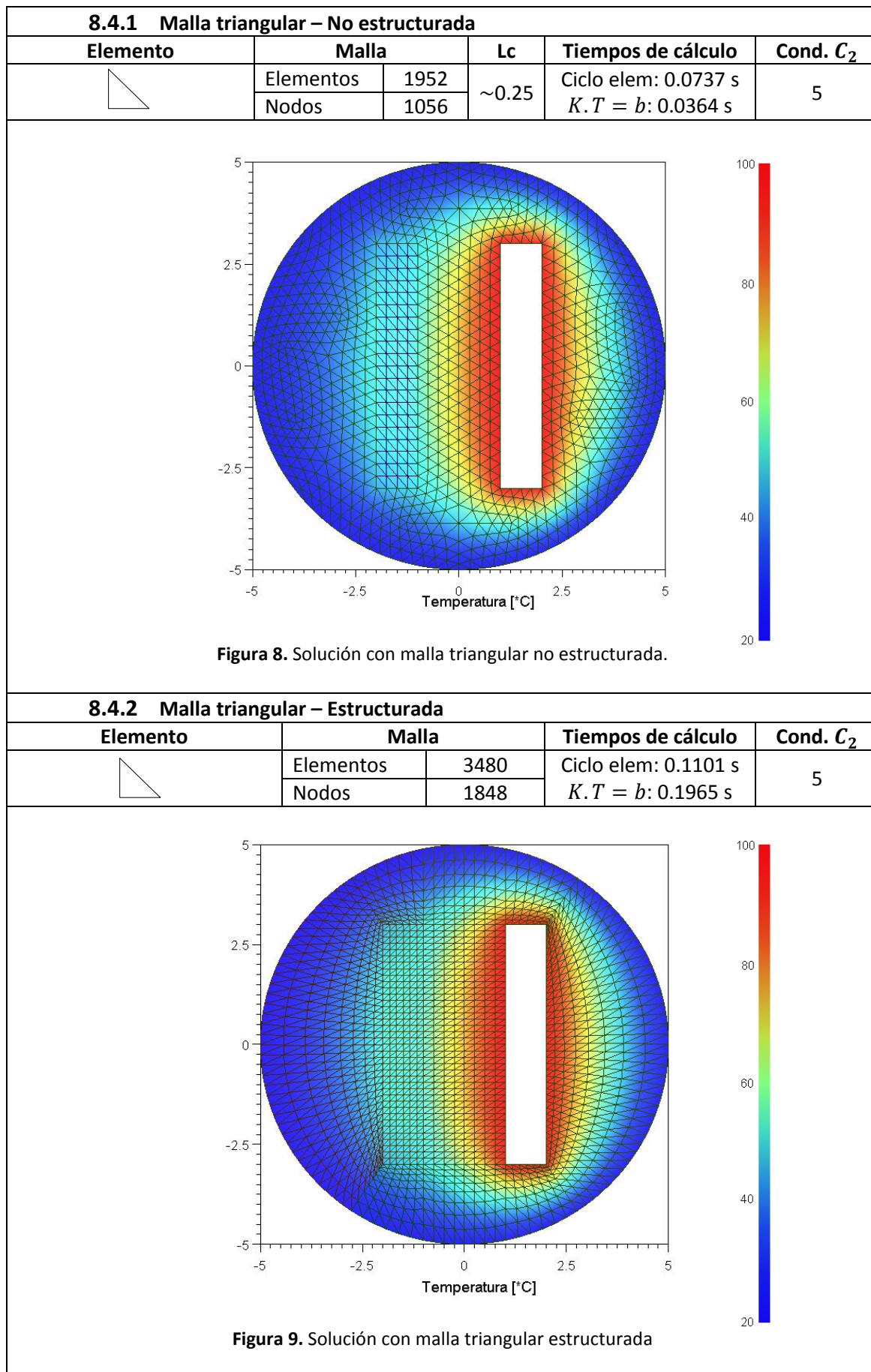
La Figura 16 muestra la comparación entre los resultados de 4 mallados de elementos triangulares de primer orden. Se inició con una malla con longitud característica aplicada en los nodos igual a 1. Luego se refinó mediante el comando Refine by Splitting, el cual divide en dos cada lado para formar nuevos elementos. Así, el lado de un elemento de la malla más fina mide aproximadamente 1/8 del lado de los elementos de la discretización inicial.

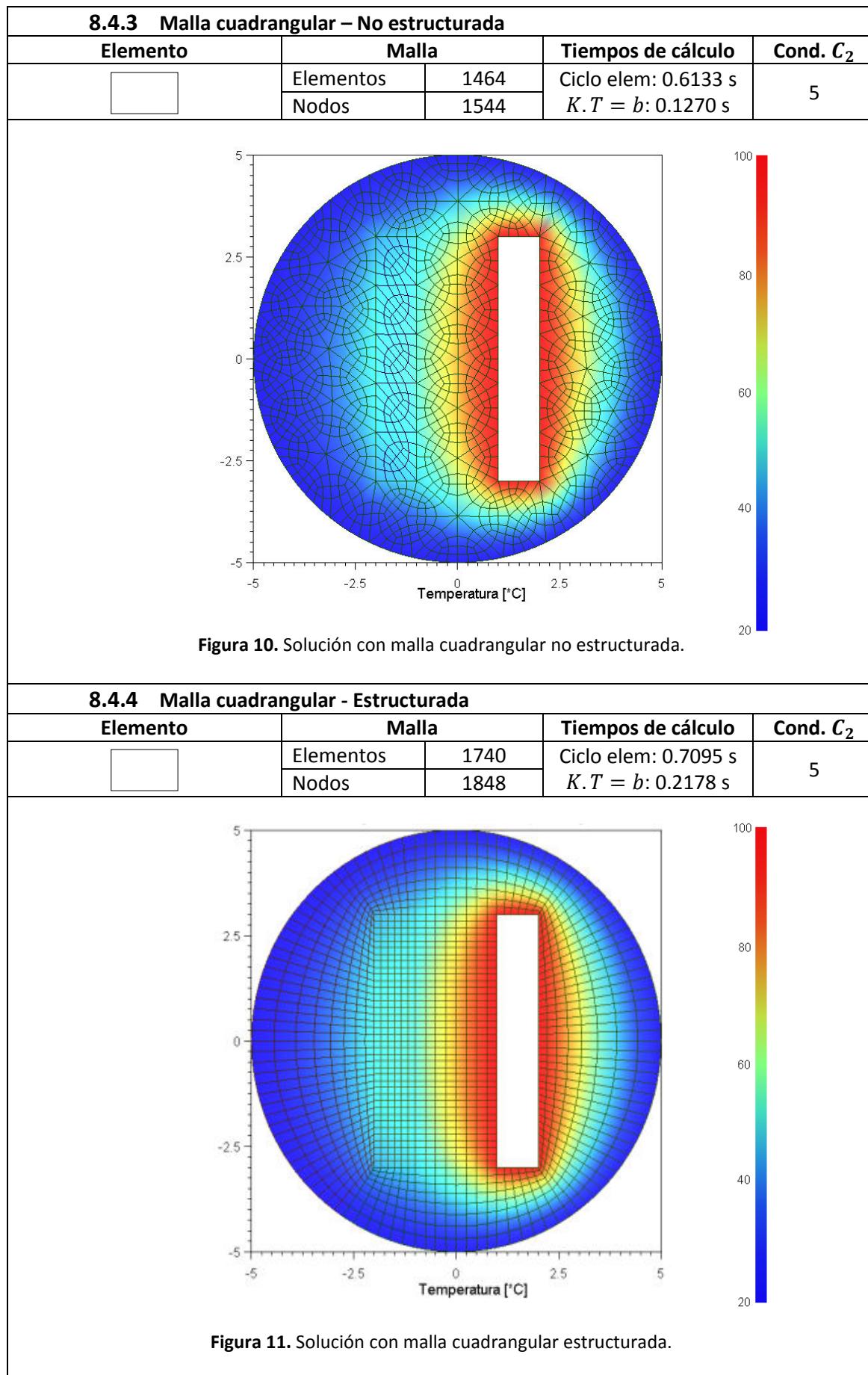
Las figuras muestran a la izquierda la discretización y a la derecha la distribución de temperaturas. Se grafican tonos rojos para las temperaturas altas y azules para las bajas.

8.4 Análisis de Resultados

Al momento no se posee solución analítica del problema ni otra solución para comparar los resultados obtenidos. Como alternativa emplearemos los siguientes criterios para justificar los resultados:

- Ninguna de las temperaturas nodales supera los 100°C ni desciende por debajo de 20°C.
- Los gráficos de temperatura muestran gradientes de temperatura lógicos. Las temperaturas descienden a medida que los nodos se alejan de la condición de borde más caliente. Las pendientes nunca se hacen positivas, siempre son negativas.
- Los resultados, al igual que la geometría del intercambiador, son simétricos. Numéricamente existen diferencias, pero éstas disminuyen con el refinamiento de la malla.





- d) En la zona con conductividad C_2 las temperaturas desciden con una pendiente menor. Esto obedece la física del problema visto desde el punto de vista de la ley de Fourier, donde a mayor conductividad, menor debe ser la diferencia de temperaturas para conservar el mismo flujo de calor. Esto se ilustrará mejor más adelante.
- e) La solución del problema por la discretización triangular y cuadrangular otorgan resultados muy similares.

8.4.5 Malla triangular vs. Malla cuadrangular

La diferencia más grande entre las dos discretizaciones es el tiempo de cálculo del ciclo elemental. Comparando los tiempos se observa que el tiempo invertido en los ciclos elementales de las mallas cuadrangulares es alrededor de 18 veces mayor que las triangulares. Esto último fue verificado realizando simulaciones independientes de una y otra formulación, dado que se halló que incluir el algoritmo de una segunda formulación en el programa afectaba los tiempos de cálculo. Los ciclos de cálculo elementales son independientes, pero ambos se hallan dentro del mismo ciclo for.

Lo anterior es solo un reflejo de la extensión de las formulaciones. Allí es notable que la cantidad de operaciones que involucra la formulación cuadrangular es mucho mayor. En la Tabla 5 se puede corroborar que la diferencia de soluciones entre discretizaciones es menor al 0.2% para una $Lc \sim 0.25$. Tener en cuenta que la tabla solo analiza 4 nodos.

8.4.6 Malla estructurada vs. Malla no estructurada

Para comparar los resultados se tomarán cuatro nodos que son comunes para los cuatro mallados. Estos nodos corresponden a los vértices de la superficie C_2 .

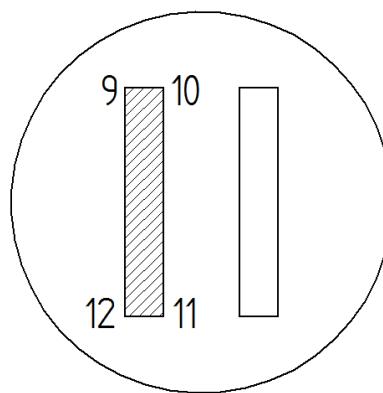


Figura 12. Nodos comunes a todas las discretizaciones.

En la Tabla 5 se observa una comparación entre soluciones en puntos comunes con el objeto de ilustrar que las diferencias entre mallas estructuradas y no estructuradas son pequeñas. Entre mallas triangulares, la diferencia máxima es de 0.0689%, mientras que entre mallas cuadrangulares, de 0.1821%.

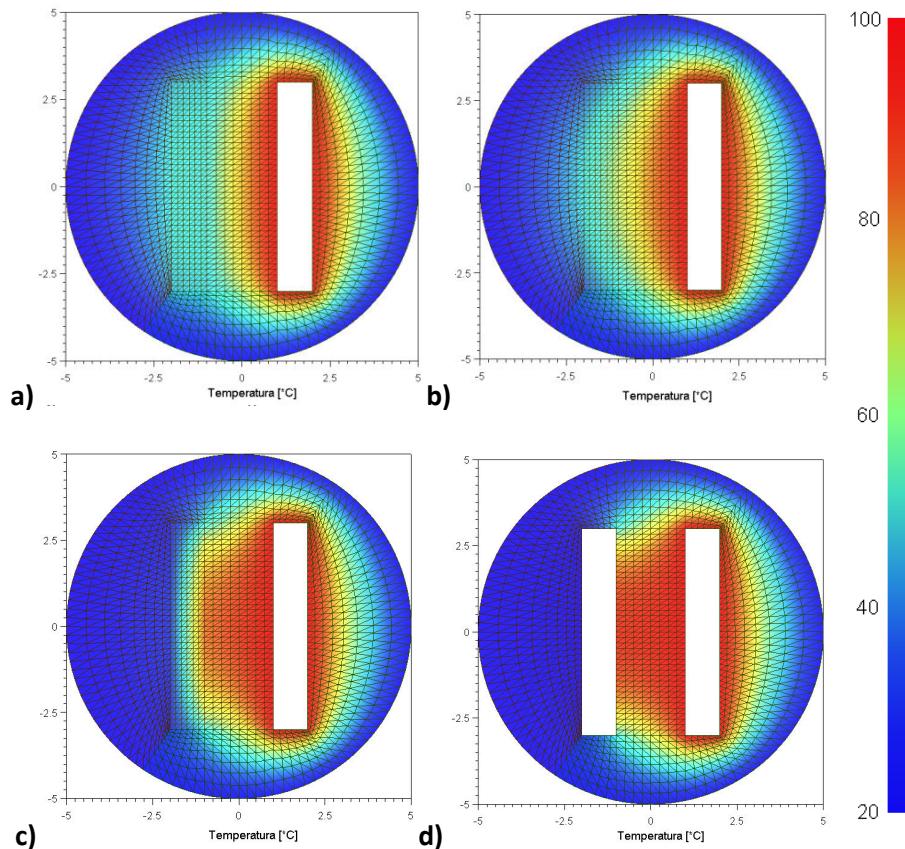
Tabla 5. Diferencia de soluciones entre mallas estructuradas y no estructuradas. $Lc \sim 0.25$.

	Temperatura °C					
	Triangular			Cuadrangular		
	Estruct.	No estruct.	Diferencia	Estruct.	No estruct.	Diferencia
Nodo 9	42.496040	42.454249	0.0522%	42.434018	42.447258	-0.0165%
Nodo 10	47.087388	47.095751	-0.0105%	47.040886	47.058517	-0.0220%
Nodo 11	47.072786	47.094860	-0.0276%	47.040886	47.077946	-0.0463%
Nodo 12	42.396550	42.451701	-0.0689%	42.434018	42.288338	0.1821%

En relación con la simetría de los resultados, tenemos que el mallado triangular no estructurado parece poseer menos asimetría que el cuadrangular no estructurado. Las soluciones para los nodos 9, 12 y 10, 11, deberían ser simétricas. Debido al algoritmo de refinamiento cuadrangular, la malla no estructurada resulta con elementos muy deformados (patrones de mallado circulares, ver Figura 10), cosa que no sucede con la malla triangular.

8.4.7 Comportamiento de la solución con la variación de C_2

No se dispone de una solución analítica o numérica diferente, por lo tanto compararemos los resultados de las dos formulaciones entre sí.

**Figura 13.** Soluciones con malla triangular estructurada con variación de la conductividad C_2 .

a) $C_2 = 10C_0$. b) $C_2 = C_0$. c) $C_2 = 0.1C_0$. d) $C_2 = 0$.

En la Figura 14 se observan las curvas de temperatura sobre la línea de simetría (línea roja) para los diferentes valores de conductividad. De la coordenada $X=10$ hacia la derecha la curva

de color negro se superpone sobre las demás, por ello no se aprecian, dado que las curvas azul, roja y verde, hacia la derecha de C_1 , tienen todas soluciones muy similares. Las curvas de esta figura fueron generadas con resultados triangulares y estructurados. No se grafican curvas para la malla cuadrangular dado que son muy similares a las de la Figura 14.

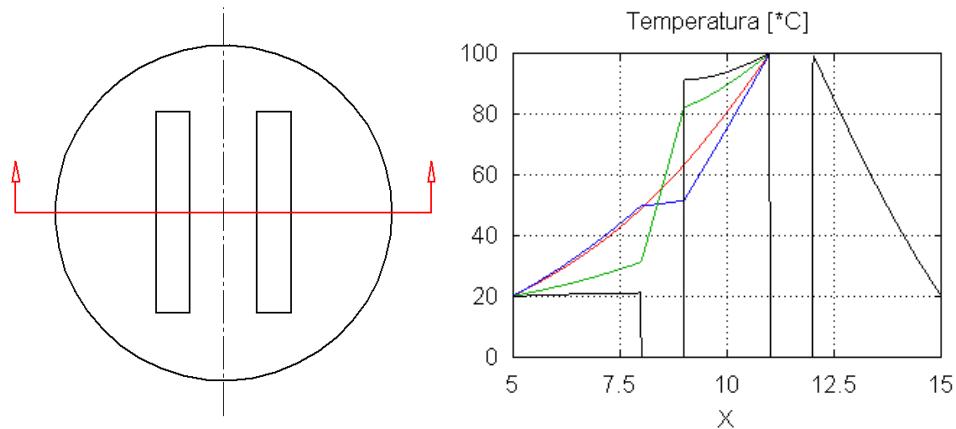


Figura 14. Perfiles de temperatura sobre línea de simetría.

$$-\mathcal{C}_2 = 10\mathcal{C}_0 \quad -\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_0 \quad -\mathcal{C}_2 = 0.1\mathcal{C}_0 \quad -\mathcal{C}_2 = 0$$

La Figura 14 es producto del Post-Procesamiento de los datos a través del GMSH. En la Tabla 6 se observa la diferencia máxima entre la solución de la formulación triangular y la cuadrangular (vectores de temperatura) para diferentes valores de \mathcal{C}_2 . Realizar esta comparación fue posible gracias a que la numeración de los nodos coincide por completo.

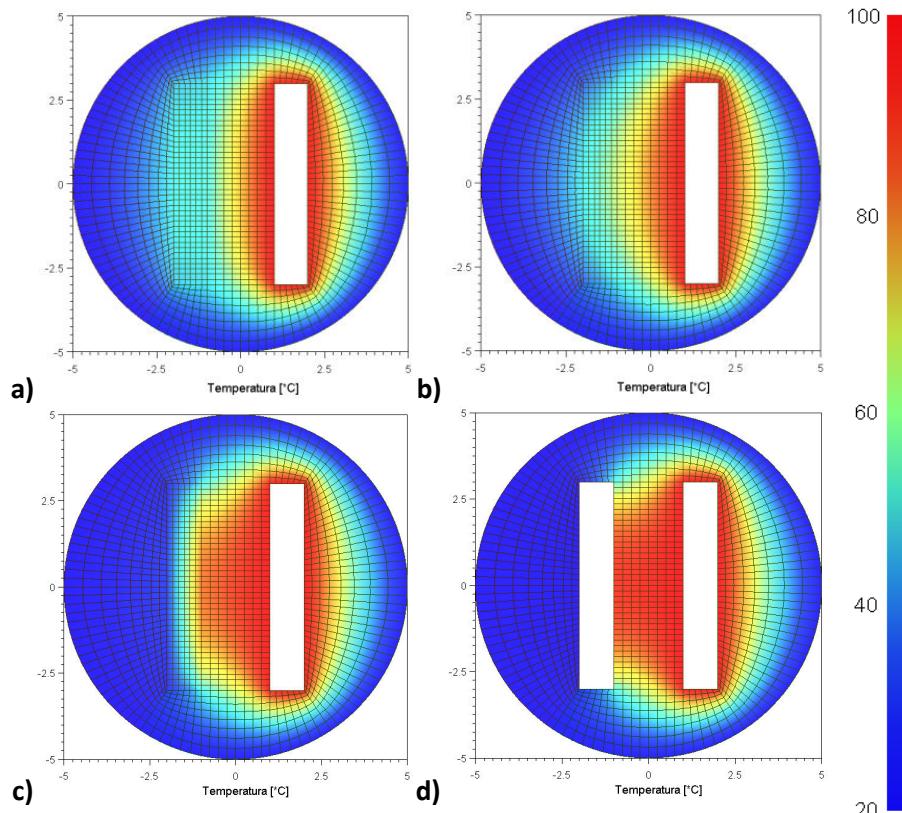


Figura 15. Soluciones con malla cuadrangular estructurada con variación de la conductividad \mathcal{C}_2 .

Tabla 6. Porcentaje de diferencia entre formulaciones para diferente conductividad C_2

C_2	Diferencia máxima absoluta °C ($T_{triangular} - T_{cuadrangular}$)	Diferencia máxima relativa [($T_{tri} - T_{cuad}$)/80] * 100
$10C_0$	1.472253	1.84%
$5C_0$	1.472230	
C_0	1.471735	
$0.1C_0$	1.469806	
0	-1.468830	-1.84%

De la Tabla 6 podemos concluir que el error máximo entre las soluciones de las dos formulaciones permanece aproximadamente constante para el mismo tamaño de malla ($Lc \sim 0.25$), no importa cuál sea el valor de la conductividad de la zona C_2 , a excepción del caso con conductividad cero. Dicho de otro modo, podríamos concluir que el error aparentemente es independiente de la conductividad al interior del dominio.

8.4.8 Malla gruesa vs. Malla fina

Se seleccionó el mallado triangular no estructurado para el análisis. En la Figura 16 observamos las diferentes distribuciones de temperatura a medida que la malla es refinada. Se observa que a medida que el tamaño de los elementos decrece la distribución del campo de temperaturas nodales permite que las interpolaciones lineales entre los valores nodales de cada elemento aproximen mejor la solución de la ecuación diferencial.

Aún faltando algunos análisis, estos resultados gráficos indican que el método aparentemente es consistente en lo que respecta a la formulación triangular.

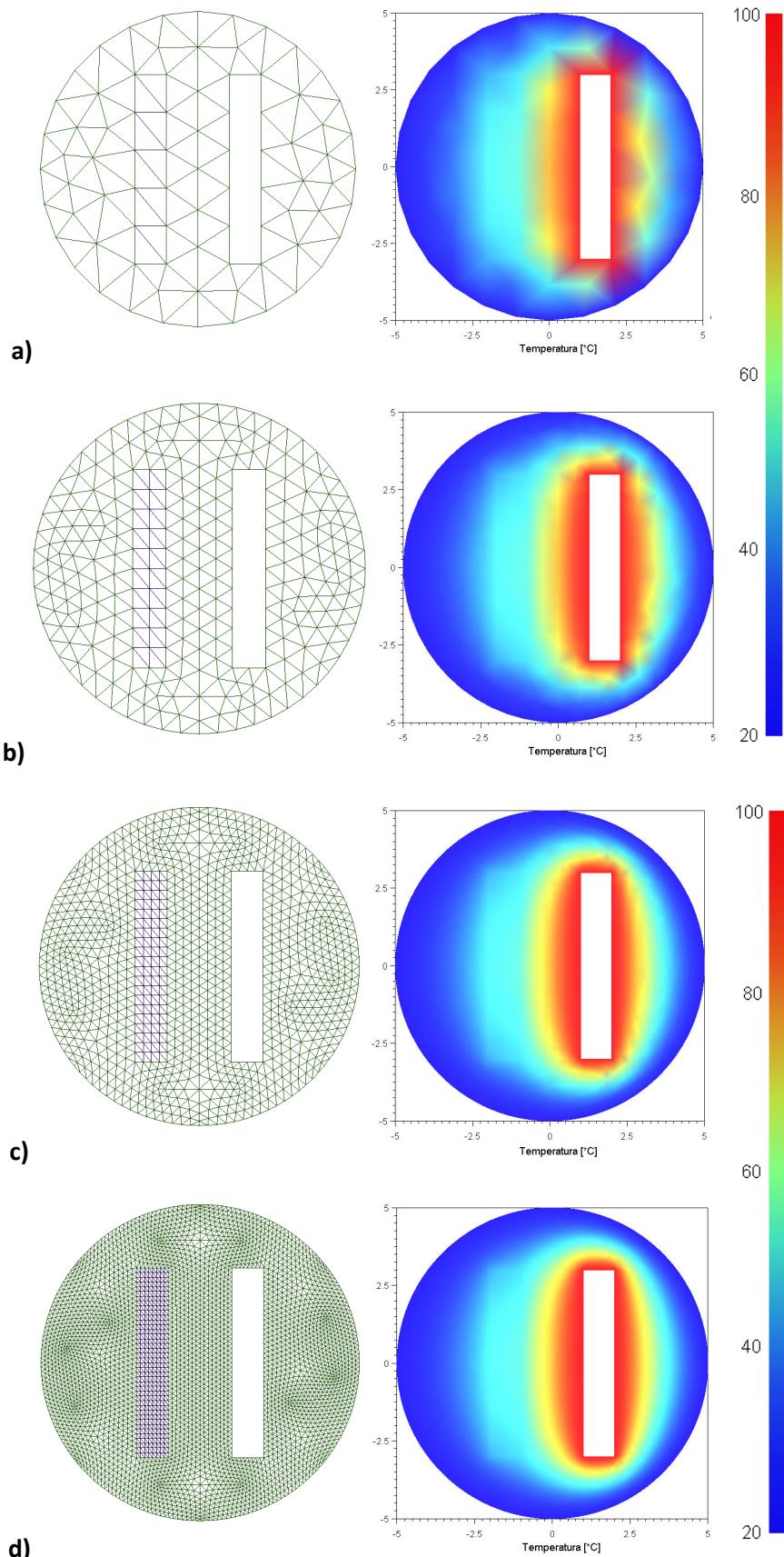


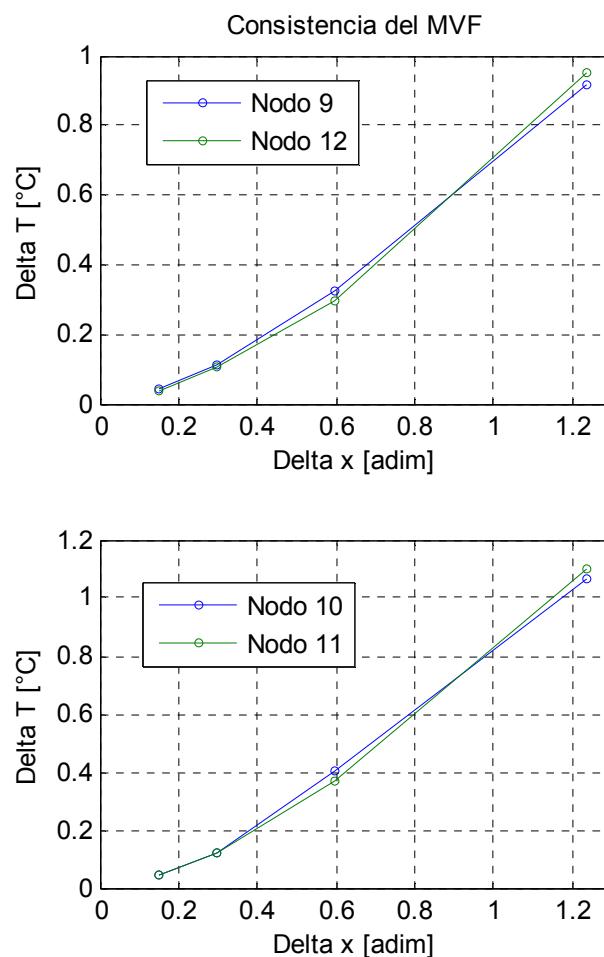
Figura 16. Soluciones con variación del tamaño de la malla.

a) Malla sin refinar. **Lc=1.** **b)** $Lc=0.5$. **c)** $Lc=0.25$. **d)** $Lc=0.125$.

Tabla 7. Comportamiento de la solución con el cambio del tamaño de la malla.

Malla triangular – No estructurada					
x	2.4203	1.1863	0.5897	0.2943	0.1470
Lc	2	1	0.5	0.25	0.125
Nodo 9	43.802775	42.886877	42.563585	42.454249	42.413515
Nodo 10	48.681529	47.617441	47.217009	47.095751	47.050322
Nodo 11	48.681529	47.582315	47.212365	47.094860	47.049960
Nodo 12	43.802775	42.853995	42.556644	42.451701	42.412173

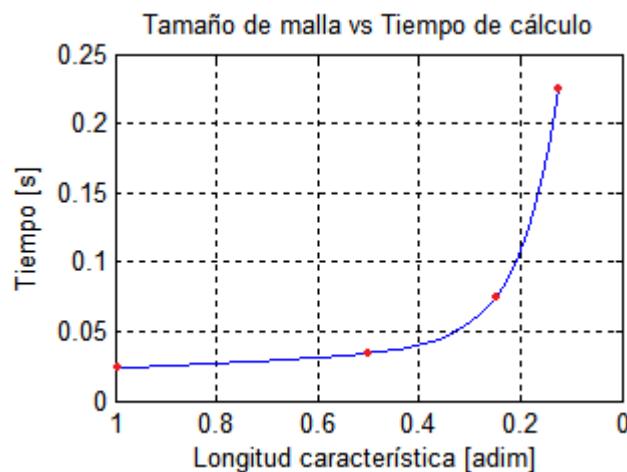
Analizando los resultados numéricos de la Tabla 7, ilustrados en la Figura 17, nos muestran la tendencia consistente del método de Volúmenes Finitos a través del resultado de las curvas Delta x vs. Delta T. Así, cuando Delta x tiende a cero, Delta T también tiende a cero.

**Figura 17.** Solución vs. Tamaño de malla para malla triangular no estructurada.

En la Tabla 8 se presenta el cambio de algunas variables con el tamaño de la malla. Estos datos corresponden a las simulaciones de la Figura 16. La variable Δx corresponde a la longitud promedio de los lados de todos los elementos de la malla.

Tabla 8. Variación de algunos parámetros con el cambio del tamaño de la malla.

Longitud característica	Δx	Tiempo calculo ciclo elemental	Tiempo cálculo $K \cdot \hat{T} = b$	Elementos	Nodos
1	1.1863	0.0235	4.06e-4	122	81
0.5	0.5897	0.0342	0.0022	488	284
0.25	0.2943	0.0737	0.0364	1952	1056
0.125	0.1470	0.2254	1.0150	7808	4064

**Figura 18.** Tamaño de malla vs. Tiempo de cálculo de ciclos elementales para malla triangular.

La Figura 18 contiene la curva de Lc vs. Tiempo de cálculo de ciclos elementales para la malla triangular refinada de la Figura 16. El mejor ajuste obtenido para los cuatro puntos resultó con una regresión de la forma $t_{calculo} = ae^{b*Lc} + ce^{d*Lc}$, donde $a = 0.9641, b = -13.3, c = 0.04619, d = -0.6764$.

Es posible entonces concluir que el tiempo de cálculo de todos los ciclos elementales de cada simulación varía en forma exponencial con la reducción de la longitud característica.

9. CONCLUSIONES GENERALES Y OBSERVACIONES

Se desarrolló la formulación del método de Volúmenes Finitos para elementos cuadrangulares en base a la formulación para elementos triangulares vista en el curso de Análisis Numérico Avanzado y se implementaron ambas formulaciones en un código computacional.

Utilizando la herramienta de Pre-Procesamiento GMSH, se dibujaron dos geometrías para el problema (una para malla estructurada y otra para no estructurada) y se generaron mallas de diferentes longitudes características y disposición de elementos para estudiar el comportamiento de variables como los tiempos de procesamiento, errores numéricos, distribuciones de temperatura, etc.

Se estudió la influencia del cambio de la conductividad del dominio en las soluciones. Se concluyó que el cambio de la conductividad térmica es independiente del error, y que éste depende en gran medida del diseño de la malla, dentro de lo cual se halla el tamaño de los elementos y la forma como se organizan dentro de la malla.

Se verificó que el método de los Volúmenes Finitos es consistente, dado que el error tiende a cero conforme se hace más fina la malla.

El tiempo de cálculo aumentado que conllevan los cálculos con discretizaciones cuadrangulares se debe a la formulación tan extensa que posee el método y a la gran cantidad de integrales, las cuales también deben ser calculadas numéricamente.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ZIENKIEWICS, O.C., Taylor, R.L. The Finite Element Method. Volume I: The Basis. Fifth Edition. 2000. PP. Apéndice G.
2. BATHE, Klaus-Jurgen. Finite Element Procedures. Prentice-Hall. 1996. PP 457.

ANEXOS

RESUMEN DE PARÁMETROS DE MALLADO

Los siguientes parámetros fueron utilizados en cada operación de mallado a lo largo de todo el trabajo. Todos pueden ser observados siguiendo Options -> Mesh, en la interfaz de usuario de GMSH.

Parámetros generales	
Algoritmo de mallado 2D	MeshAdapt
Algoritmo de recombinación	Standard
Algoritmo de subdivisión	Ninguno
Algoritmo de remallado	Automático
Parametrización de remallado	Armónica
Smoothing steps	1
Longitud característica	1
Orden del elemento	1

ALGORITMO DE CÁLCULO COMPUTACIONAL

El siguiente es el código de Matlab desarrollado para aplicar las formulaciones de Volúmenes finitos a la solución de la ecuación de Laplace. Dentro del ciclo elemental, para el cálculo numérico de las integrales para la formulación cuadrangular, se elaboraron dos subprogramas llamados integraciondr e integracionds. Ambos programas producen resultados numéricos para las variables intdr, intrdr, intsdr, intrsdr, ints2dr, intds, intrds, intsds, intrsds e intr2ds.

Dichas integrales involucran al determinante del Operador Jacobiano. Luego:

$intdr = \oint \frac{dr}{\det(J)}$	$intds = \oint \frac{ds}{\det(J)}$
$intrdr = \oint \frac{rdr}{\det(J)}$	$intsds = \oint \frac{sds}{\det(J)}$
$intsdr = \oint \frac{sdr}{\det(J)}$	$intrds = \oint \frac{rds}{\det(J)}$
$intrsdr = \oint \frac{rsdr}{\det(J)}$	$intrsds = \oint \frac{rsds}{\det(J)}$
$ints2dr = \oint \frac{s^2dr}{\det(J)}$	$intr2ds = \oint \frac{r^2ds}{\det(J)}$

Algoritmo de cálculo

```

clear all
clc

%SELECCIONAR FORMULACIÓN
%  Triangular      [1]
%  Cuadrangular    [2]
formulacion=2;

%CARGA DE ARCHIVO DE DATOS
%Contiene tres matrices
%coord_0
%nodos_bc
%conec

load matrices_cuadest_fina_sinc2

%Asigno CB a archivo de nodos(coord)

bc0=20; %Temperatura de bc0
bc1=100; %Temperatura de bc1

nnodos=length(coord_0(:,1));
nelementos=length(conec(:,1));
ncolcoord_0=length(coord_0(1,:));
nfilasnodos_bc=length(nodos_bc(:,1));

coord=zeros(nnodos,6);

%Sumo la matriz coord_0 a coord

for j=1:ncolcoord_0
    for i=1:nnodos
        coord(i,j)=coord_0(i,j);
    end
end

%Asigno CB a archivo de nodos(coord)

for i=1:nfilasnodos_bc
    %Llena columna con temperaturas de bc0 - Exterior
    if nodos_bc(i,4)==1 %Cambiar si GMSH enumeró diferente
        for j=6:7
            coord(nodos_bc(i,j),5)=1;
            coord(nodos_bc(i,j),6)=bc0;
        end
    end
    %Llena columna con temperaturas de bc1 - Derecha
    if nodos_bc(i,4)==2 %Cambiar si GMSH enumeró diferente
        for j=6:7
            coord(nodos_bc(i,j),5)=1;
            coord(nodos_bc(i,j),6)=bc1;
        end
    end
end

kglobal=zeros(nnodos,nnodos);

```

```

tic; %Inicia contador de tiempo

%INICIO DE LOS CICLOS ELEMENTALES
%Se aplicará la formulación a cada elemento
%Se formarán matrices elementales por elemento
%Se sumará la matriz elemental a la matriz global

for k=1:nelementos

    if formulacion==1

        kelem=zeros(3,3);

        %CICLO ELEMENTAL

        lx_12=coord(conec(k,7),2)-coord(conec(k,6),2); %lx_12=x_nodo2-
x_nodo1 del elemento i
        ly_12=coord(conec(k,7),3)-coord(conec(k,6),3); %ly_12=y_nodo2-
y_nodo1 del elemento i
        lx_13=coord(conec(k,8),2)-coord(conec(k,6),2); %lx_13=x_nodo3-
x_nodo1 del elemento i
        ly_13=coord(conec(k,8),3)-coord(conec(k,6),3); %ly_12=y_nodo2-
y_nodo1 del elemento i

        delta=lx_12*ly_13-lx_13*ly_12;

        alfa_12=(1/delta)*(lx_12^2+ly_12^2);
        alfa_13=(1/delta)*(lx_13^2+ly_13^2);
        alfa_123=(1/delta)*(lx_12*lx_13+ly_12*ly_13);

        %Elementos TRIANGULARES

        for G=1:3

            %Para nodo G_(1)_m

            if G==1
                psi_epsilon_n=-1/2;
                psi_eta_n=1/2;

            %Para nodo G_(2)_m

            elseif G==2
                psi_epsilon_n=0;
                psi_eta_n=-1/2;

            %Para nodo G_(3)_m

            elseif G==3
                psi_epsilon_n=1/2;
                psi_eta_n=0;
            end

            a2=alfa_123*psi_epsilon_n+alfa_13*psi_eta_n;
            a3=-alfa_12*psi_epsilon_n-alfa_123*psi_eta_n;

            %Aportes de cada nodo
        end
    end
end

```

```

%Asignación de valores a matriz elemental

if conec(k,4)==3
    kelem(G,1)==-(a2+a3);
    kelem(G,2)=a2;
    kelem(G,3)=a3;
end

%Condición de Neumann

if conec(k,4)==4
    kelem(G,1)==-5*(a2+a3);
    kelem(G,2)=5*a2;
    kelem(G,3)=5*a3;
end

%Se llenó matriz elemental de 3x3
end

%Llenado de matriz global con matriz elemental

for j=1:3
    for i=1:3

kglobal(conec(k,i+5),conec(k,j+5))=kglobal(conec(k,i+5),conec(k,j+5))+
kelem(i,j);
    end
end

elseif formulacion==2

kelem=zeros(4,4);

%CICLO ELEMENTAL

x1=coord(conec(k,6),2);
x2=coord(conec(k,7),2);
x3=coord(conec(k,8),2);
x4=coord(conec(k,9),2);

y1=coord(conec(k,6),3);
y2=coord(conec(k,7),3);
y3=coord(conec(k,8),3);
y4=coord(conec(k,9),3);

a=x1-x2+x3-x4;
b=y1-y2+y3-y4;

c=x2-x1;
d=y2-y1;

e=x4-x1;
f=y4-y1;

A=(c*e+d*f);
B=(a*c+b*d);
C=(a^2+b^2);
D=(c^2+d^2);

```

```

E=(a*e+b*f);
F=(e^2+f^2);

%Elementos CUADRANGULARES

%Aportes de cada nodo

for G=1:4

    integraciondr
    integracionds

    a3=-A*intrds-B*intr2ds...
        +F*intsds+E*intrsds...
        -D*intrdr+A*intsdr...
        -B*intrsdr+E*ints2dr;
    a1=(A-F)*intds+(B-2*E)*intrds...
        -C*intr2ds+E*intsds...
        +C*intrsds+(D-A)*intdr...
        -B*intrdr+(2*B-E)*intsdr...
        -C*intrsdr+C*ints2dr+a3;
    a2=F*intds+2*E*intrds...
        +C*intr2ds+A*intdr...
        +B*intrdr+E*intsdr...
        +C*intrsdr-a3;
    a4=-A*intds-B*intrds...
        -E*intsds-C*intrsds...
        -D*intdr-2*B*intsdr...
        -C*ints2dr-a3;

    %Aportes de cada nodo
    %Asignación de valores a matriz elemental

    if coneck,4)==3
        kelem(G,1)=a1;
        kelem(G,2)=a2;
        kelem(G,3)=a3;
        kelem(G,4)=a4;
    end

    %Condición de Neumann

    if coneck,4)==4
        kelem(G,1)=5*a1;
        kelem(G,2)=5*a2;
        kelem(G,3)=5*a3;
        kelem(G,4)=5*a4;
    end

    %Se llenó matriz elemental de 4x4

end

%Llenado de matriz global con matriz elemental

for j=1:4
    for i=1:4

```

```

kglobal(conec(k,i+5),coneck(k,j+5))=kglobal(conec(k,i+5),coneck(k,j+5))+
kelem(i,j);
    end
end
end

tiempo=zeros(2,1); %Defino vector de tiempos
tiempo(1)=toc; %Guardo tiempo de ciclo elemental

%APLICO CONDICIONES DE BORDE A SISTEMA kglobal*T=b

%Multiplicamos y pasamos valores conocidos al vector b
%Llenamos el vector b con multiplicaciones conocidas
%y temperaturas conocidas

b=zeros(nnodos,1);
for j=1:nnodos
    for i=1:nnodos
        if coord(i,5)~=1
            b(i,1)=b(i,1)-kglobal(i,j)*coord(j,6);
        else
            b(i,1)=coord(i,6);
        end
    end
end

%Se modifica la matriz de coeficientes
%para terminar de introducir temperaturas conocidas

for i=1:nnodos
    if coord(i,5)==1
        kglobal(:,i)=0;
        kglobal(i,:)=0;
        kglobal(i,i)=1;
    end
end

tic; %Inicializo segundo contador
T=kglobal\b;
tiempo(2)=toc; %Guardo tiempo de solución T=kglobal\b

nfilasT=length(T(:,1));
Tmsh=zeros(nfilasT,2);

%Se prepara archivo de salida para GMSH

for i=1:nfilasT
    Tmsh(i,1)=i;
    Tmsh(i,2)=T(i);
end

%Se genera archivo de salida con T's nodales

fi=fopen('salida.txt', 'w');

for i=1:nfilasT
    for j=1:2

```

```
    fprintf(fi, '%f \r', Tmsh(i,j));
end
fprintf(fi, '\n');
end

fclose(fi)
```

--- Fin del Programa ---